

# Innovationsbasierte Wachstumstheorie

## DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Wirtschaftswissenschaft

eingereicht an der  
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Regensburg

vorgelegt von

Wolfgang Kornprobst

Berichterstatter:

Prof. Dr. Lutz Arnold

Prof. Dr. Jürgen Jerger

Tag der Disputation: 23.01.2008



# Inhaltsübersicht

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1	Motivation und stilisierte Fakten	3
<b>II</b>	<b>Modelle mit zunehmender Produktvielfalt</b>	<b>15</b>
2	Das Romer-Modell	17
3	Das Jones-Modell	41
4	Das Grossman-Helpman-Modell I	51
<b>III</b>	<b>Wachstum durch Qualitätsverbesserungen</b>	<b>61</b>
5	Das Grossman-Helpman-Modell II	63
6	Weitere Qualitäten-Modelle	81
<b>IV</b>	<b>Das Romer-Modell mit vertikalen Innovationen</b>	<b>83</b>
7	Das Romer-Qualitäten-Modell	85
8	Komparative Statik und Dynamik	135
9	Horizontale und vertikale Innovationen	179
<b>V</b>	<b>Zusammenfassung und Schlussbemerkung</b>	<b>209</b>
10	Zusammenfassung	211



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1	Motivation und stilisierte Fakten	3
<b>II</b>	<b>Modelle mit zunehmender Produktvielfalt</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Das Romer-Modell</b>	<b>17</b>
2.1	Beschreibung des Modells und Annahmen . . . . .	17
2.1.1	Ideen und Wissen . . . . .	17
2.1.2	Struktur . . . . .	20
2.1.3	Haushalte . . . . .	21
2.1.4	Endprodukthersteller . . . . .	22
2.1.5	Forschungssektor . . . . .	23
2.1.6	Zwischenprodukthersteller . . . . .	24
2.2	Dynamisches Gleichgewicht . . . . .	24
2.3	Skaleneffekte . . . . .	33
2.4	Wohlfahrt . . . . .	34
2.5	Stabilität . . . . .	37
2.6	Schlussbemerkung . . . . .	37
2.7	Appendix: Herleitung . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Das Jones-Modell</b>	<b>41</b>
3.1	Beschreibung des Modells und Annahmen . . . . .	41
3.2	Dynamisches Gleichgewicht . . . . .	42
3.3	Wohlfahrt . . . . .	45
3.4	Stabilität . . . . .	47
3.5	Empirische Implikationen . . . . .	47

<b>4</b>	<b>Das Grossman-Helpman-Modell I</b>	<b>51</b>
4.1	Beschreibung des Modells und Annahmen . . . . .	51
4.2	Dynamisches Gleichgewicht . . . . .	52
4.3	Stabilität . . . . .	56
4.4	Wohlfahrt . . . . .	59
<b>III</b>	<b>Wachstum durch Qualitätsverbesserungen</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>Das Grossman-Helpman-Modell II</b>	<b>63</b>
5.1	Beschreibung des Modells . . . . .	63
5.1.1	Endprodukthersteller . . . . .	65
5.1.2	Zwischenproduktsektor und F&E . . . . .	66
5.2	Dynamisches Gleichgewicht . . . . .	67
5.3	Stabilität . . . . .	71
5.4	Wohlfahrt . . . . .	74
5.5	Appendix: $P_A$ und Arbitragegleichung . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Weitere Qualitäten-Modelle</b>	<b>81</b>
<b>IV</b>	<b>Das Romer-Modell mit vertikalen Innovationen</b>	<b>83</b>
<b>7</b>	<b>Das Romer-Qualitäten-Modell</b>	<b>85</b>
7.1	Einleitung . . . . .	85
7.2	Beschreibung des Modells . . . . .	87
7.3	Dynamisches Gleichgewicht . . . . .	91
7.3.1	Zwischenprodukthersteller . . . . .	91
7.3.2	Kapitalmarktgleichgewicht . . . . .	97
7.3.3	Haushalte . . . . .	98
7.3.4	Steady state Wachstum . . . . .	100
7.3.5	Komparative Statik . . . . .	106
7.4	Wohlfahrt . . . . .	108
7.5	Semi-endogenes Wachstum . . . . .	116
7.6	Schluss . . . . .	119
7.7	Appendix: Anmerkungen zur Produktionsfunktion . . . . .	121
7.8	Appendix: Herleitungen . . . . .	123

<b>8</b>	<b>Komparative Statik und Dynamik</b>	<b>135</b>
8.1	Stabilität in Wachstumsmodellen . . . . .	135
8.1.1	Differentialgleichungen . . . . .	135
8.1.2	Solow-Modell . . . . .	136
8.1.3	Ramsey-Cass-Koopmans-Modell . . . . .	138
8.1.4	Der allgemeine Fall: $n \times n$ -Systeme . . . . .	145
8.2	Stabilität im Romer-Qualitäten-Modell . . . . .	146
8.2.1	Einleitung . . . . .	146
8.2.2	Marktgleichgewicht . . . . .	147
8.2.3	Steady state . . . . .	149
8.2.4	Komparative Statik . . . . .	152
8.2.5	Dynamik . . . . .	157
8.2.6	Bestimmung der Startwerte . . . . .	163
8.2.7	Offene Volkswirtschaft mit $M$ Ländern . . . . .	164
8.2.8	Schlussbemerkung . . . . .	165
8.2.9	Appendix: Herleitungen . . . . .	166
<b>9</b>	<b>Horizontale und vertikale Innovationen</b>	<b>179</b>
9.1	Einleitung . . . . .	179
9.2	Beschreibung des Modells . . . . .	181
9.3	Dynamisches Gleichgewicht . . . . .	184
9.3.1	Haushalte . . . . .	184
9.3.2	Technischer Fortschritt . . . . .	185
9.3.3	Wachstumsrate des Outputs . . . . .	187
9.3.4	Allokation von Arbeit . . . . .	192
9.4	Schluss . . . . .	200
9.5	Appendix: Vergleich der Produktionsfunktionen . . . . .	201
9.6	Appendix: Herleitung der Wachstumsrate von $Q(t)$ . . . . .	202
9.7	Appendix: Wachstumsrate des Wertpapierbestands . . . . .	203
9.8	Appendix: Beweis, dass $r > D_{1/2}$ gilt . . . . .	207
<b>V</b>	<b>Zusammenfassung und Schlussbemerkung</b>	<b>209</b>
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>211</b>





# Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung des Pro-Kopf-BIPs . . . . .	5
1.2	Weltweites Pro-Kopf-BNE in 2005 . . . . .	7
1.3	Entwicklung des (tatsächlichen) Preises von Licht . . . . .	9
2.1	Nutzungseigenschaften ausgewählter Güter . . . . .	19
2.2	Die Struktur des Romer-Modells . . . . .	21
2.3	Wachstumsrate und komparative Statik . . . . .	32
4.1	Die Struktur des Grossman-Helpman-Modells . . . . .	52
4.2	Stabilität im Grossman-Helpman-Modell . . . . .	57
5.1	Die Struktur des Modells . . . . .	64
5.2	Qualitätsleiter . . . . .	65
5.3	Stabilität im Grossman-Helpman-Modell . . . . .	73
7.1	Entwicklung des Kapitalstocks in den U.S.A. (1929 – 1995) . . . .	86
7.2	Qualitätsleiter . . . . .	89
7.3	Steady state, wenn $\sigma > 1$ . . . . .	102
7.4	Steady states wenn $\sigma < 1$ . . . . .	103
7.5	Zulässige Parameterbereiche, wenn $\bar{\sigma} > 0$ . . . . .	104
7.6	$\lambda - \alpha > \alpha \ln \lambda$ für $0 < \alpha < 1$ . . . . .	107
7.7	$\ln \lambda > 1 - 1/\lambda$ für $\lambda > 1$ . . . . .	111
7.8	Wachstumsraten . . . . .	112
7.9	Parameterwerte für $g_Y^* = g_Y$ . . . . .	115
8.1	Phasendiagramm und Linearisierung um den Steady state . . . .	137
8.2	Phasendiagramm im linearisierten Ramsey-Modell . . . . .	141
8.3	Zulässige Bereiche und Eigenschaften der Jacobi-Matrix . . . . .	151
8.4	Komparative Statik . . . . .	154

8.5	Null negative Eigenwerte: Instabilität . . . . .	159
8.6	Ein negativer Eigenwert: Sattelpunktstabilität . . . . .	160
8.7	Zwei negative Eigenwerte: Indeterminiertheit . . . . .	161
8.8	Bifurkation . . . . .	162
9.1	Die Struktur des Modells . . . . .	182

# Teil I

## Einleitung



# Kapitel 1

## Motivation und stilisierte Fakten

Menschen in den industrialisierten Ländern haben heute einen nie da gewesenen materiellen Lebensstandard. Ihr Einkommen ist ein Vielfaches dessen, was ihre Vorfahren zu Verfügung hatten. In Deutschland sind vor 60 Jahren – im „Hungerwinter“ 1946/47 – noch Menschen an Unterernährung gestorben. Der drastische Anstieg der Einkommen der Menschen wurde möglich, weil das Produktionspotential (bzw. die Produktivität) der Länder sich kontinuierlich verbessert hat. Die folgende Tabelle zeigt die Wachstumsraten des Bruttoinlandsprodukts (BIP) pro Kopf zwischen 1870 und 1987 und zwischen 1961 und 2005 und die Höhe des BIPs pro Kopf in 2005 für sieben ausgewählte „reiche“ Länder. Die hohen Niveaus von heute resultieren aus einer kontinuierlichen jährlichen Zunahme des BIPs.<sup>1</sup> Dies gilt auch für eine längere Betrachtung, wie Abbildung 1.1 exemplarisch für Deutschland, Frankreich, Italien, Japan, Kanada, Großbritannien und die USA verdeutlicht. Die durchschnittlichen jährlichen Wachstumsraten für diese Länder betrugen im Zeitraum 1870 bis 1987 zwischen 1,33% in Großbritannien und 2,60% in Japan.<sup>2</sup>

Mit der Zunahme des Inlandsproduktes pro Kopf steigt auch das Einkommen, das einer Person im Durchschnitt zur Verfügung steht und mit dem sie sich neben Konsumgütern und mehr Freizeit auch eine bessere Gesundheit leisten kann. Für Easterly (2001, S. 3) (und wahrscheinlich viele seiner Kollegen) ist genau dies der

---

<sup>1</sup>Die Ausschläge durch Konjunkturzyklen sind moderat, wie die Standardabweichungen zeigen.

<sup>2</sup>Die in 1870 ärmeren Länder wie Deutschland und Japan sind am schnellsten gewachsen. Großbritannien, das als erstes Land die Industrialisierung vollzog und in 1870 relativ reich war, wuchs hingegen am langsamsten. Für diese Gruppe an Ländern gibt es also eine deutliche Konvergenz der Wirtschaftskraft, wie Abbildung 1.1 verdeutlicht. Deutschland und Japan haben Großbritannien sogar überholt („leap-frogging“).

**BIP pro Kopf und durchschnittliche Wachstumsrate.**

Land	BIP in 2005 (in US-\$) <sup>a</sup>	Wachstumsrate 1961-2005 (in %) <sup>b</sup>	Wachstumsrate 1870-1987 (in %) <sup>c</sup>
Deutschland	33.800	2,14 (1,75)	2,42
Frankreich	34.128	3,19 (1,82)	1,91
Italien	30.339	3,02 (2,32)	1,68
Japan	35.593	4,67 (3,88)	2,60
Kanada	35.073	3,37 (2,08)	1,68
UK	36.851	2,46 (1,81)	1,33
USA	41.768	3,35 (1,97)	1,85

<sup>a</sup>Quelle: United Nations Common Database (UNCDB, 2007).

<sup>b</sup>Quelle: United Nations Common Database (UNCDB, 2007).

In Klammern: Standardabweichungen der Wachstumsraten.

<sup>c</sup>Quelle: Jones (1995a). Daten für Japan ab 1885, für Kanada ab 1900.

Grund, sich mit Wirtschaftswachstum zu beschäftigen:

„We experts don’t care about rising gross domestic product for its own sake. We care because it betters the lot of the poor and reduces the proportion of people who are poor. We care because richer people can eat more and buy more medicines for their babies.“

Auf drastische Weise wird dies deutlich, wenn man Statistiken für die Gesundheitsversorgung (wie Kindersterblichkeit oder HIV-Infektionsrate) oder die Lebenserwartung eines Neugeborenen für arme mit reichen Ländern miteinander vergleicht. Die folgende Tabelle gibt einige ausgewählte Beispiele. In Sierra Leone sterben – hauptsächlich wegen der mangelhaften Ernährung und der schlechten Gesundheitsversorgung – über achtzig mal mehr Säuglinge bei der Geburt als in Island! In dem westafrikanischen Land erleben nicht einmal drei von vier Kindern ihren fünften Geburtstag. In Deutschland ist dies für fünf Promille der Neugeborenen der Fall. Auch bei der Ansteckungsrate mit dem HI-Virus gibt es drastische Unterschiede, die z.T. auch in der Gesundheitsversorgung (in einem weiteren Sinne inklusive Aufklärungsarbeit verstanden) begründet sind. In Swasiland ist jeder dritte Erwachsene HIV-positiv. Die Quote weltweit beträgt 2%, in Deutschland

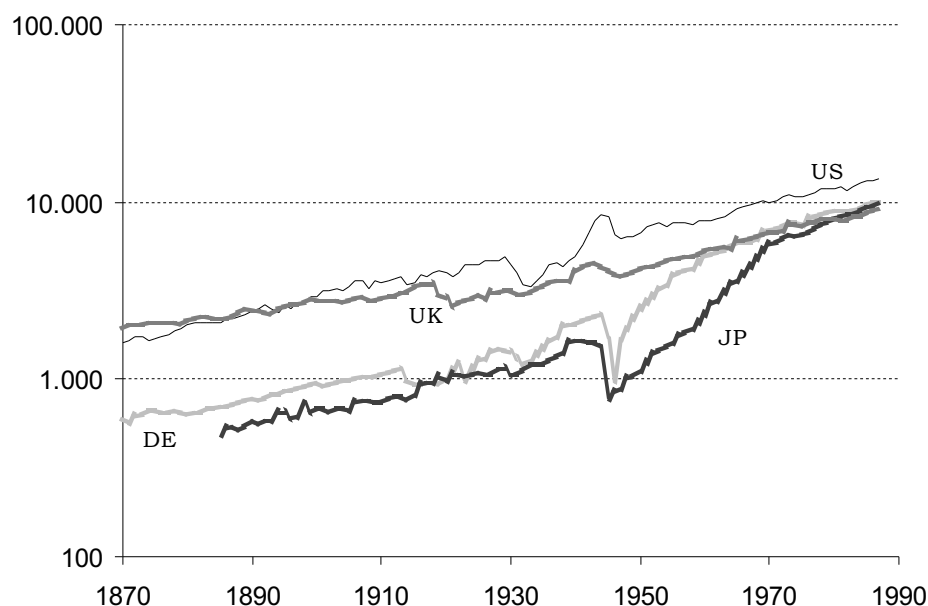


Abbildung 1.1: Entwicklung des Pro-Kopf-BIPs in Deutschland, Japan, Großbritannien und den USA 1870 und 1987 (aus Jones (1995a)).

ca. ein Promille. Als Folge sind die Lebenserwartungen in den Ländern weltweit stark unterschiedlich. Ein in Japan neugeborener Säugling kann damit rechnen, über doppelt so lange zu leben wie ein Neugeborenes in Botswana.

Die unterschiedliche weltweite Einkommensverteilung wird in Abbildung 1.2 ersichtlich.<sup>3</sup> Beinahe 2,4 Milliarden Menschen (knapp 40% der Weltbevölkerung) leben in Ländern, in denen das Bruttonationaleinkommen (BNE) pro Kopf weniger als 1.000 US-Dollar im Jahr beträgt.<sup>4</sup> In Ländern bis 5.000 US-Dollar leben etwa 80% der Weltbevölkerung. Die weltweiten Einkommensunterschiede sind enorm, wenngleich sie in den letzten Jahren – hauptsächlich durch den rasanten Aufstieg Chinas und Indiens – abgenommen haben, wie Sala-i-Martin (2006) für den Zeitraum 1970-2000 zeigt.

Die neoklassische Wachstumstheorie der 1960er Jahre identifiziert als Grund für die hohe Produktivität (und den hohen Lebensstandard) der heute industria-

<sup>3</sup>Die Zahlen wurden von der Weltbank mit der „Atlas-Methode“ berechnet. Dabei werden Wechselkursschwankungen bei der Konvertierung der BNEs der einzelnen Länder mittels gleitender Drei-Jahres-Durchschnitte geglättet.

<sup>4</sup>Der Großteil dieser Länder liegt in Afrika südlich der Sahara.

Gesundheitsindikatoren				
	Min	Max	Deutschland	Welt
Säuglingssterblichkeit <sup>a</sup>	2 (Island)	165 (Sierra Leone)	4	40
Kindersterblichkeit <sup>b</sup>	3 (Island)	282 (Sierra Leone)	5	58
HIV <sup>c</sup>	0,06 (Ungarn)	33,38 (Swaziland)	0,12	2,07
Lebenserwartung <sup>d</sup>	35,0 (Botswana)	82,1 (Japan)	78,9	66,8

<sup>a</sup>Anzahl toter Säuglinge pro 1000 Lebendgeburten.

<sup>b</sup>Anzahl toter Kinder unter fünf Jahren pro 1000.

<sup>c</sup>Anteil der HIV-positiven Bevölkerung zwischen 15 und 49 Jahren in %.

<sup>d</sup>Lebenserwartung eines Neugeborenen in Jahren.

Quelle: Weltbank, World Development Indicators (2007).

lisierten Länder den anhaltenden technischen Fortschritt, der in diesen, aber nicht in den armen Ländern, stattgefunden hat und weiterhin stattfindet. Leider konnte sie die Ursache dieses technischen Fortschritts nicht, bzw. nicht überzeugend, begründen.<sup>5</sup>

Mit der „endogenen Wachstumstheorie“ wird genau dies seit Ende der 1980er Jahre versucht. Technischer Fortschritt passiert in der Realität meistens auf zwei Arten: Zum einen werden immer neue Produkte für den Konsumenten erfunden (Produktinnovationen). Ganze Sparten, die heute einen sehr großen Teil der Konsumausgaben ausmachen (z.B. die Elektronik- und IT-Sparte) und mit denen die Menschen einen großen Teil ihrer Zeit verbringen, gab es vor wenigen Jahrzehnten noch nicht.<sup>6</sup> Zum anderen werden ständig neue und bessere Verfahren entwickelt,

<sup>5</sup>Abramovitz prägte den Begriff „measure of ignorance“ für das sog. „Solow-Residual“, das die Beiträge der Inputs für das (kurzfristige) Wachstum des Pro-Kopf-Outputs über „Growth Accounting“ zu identifizieren versucht und auf substantielle Werte für den Beitrag von technischem Fortschritt kommt (vgl. Abramovitz (1993) und Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 10)).

<sup>6</sup>DeLong (2000) schätzt, dass es Güter, die heute 45% der Ausgaben eines durchschnittlichen Konsumenten ausmachen, Ende des 19. Jahrhunderts noch gar nicht gegeben hat.



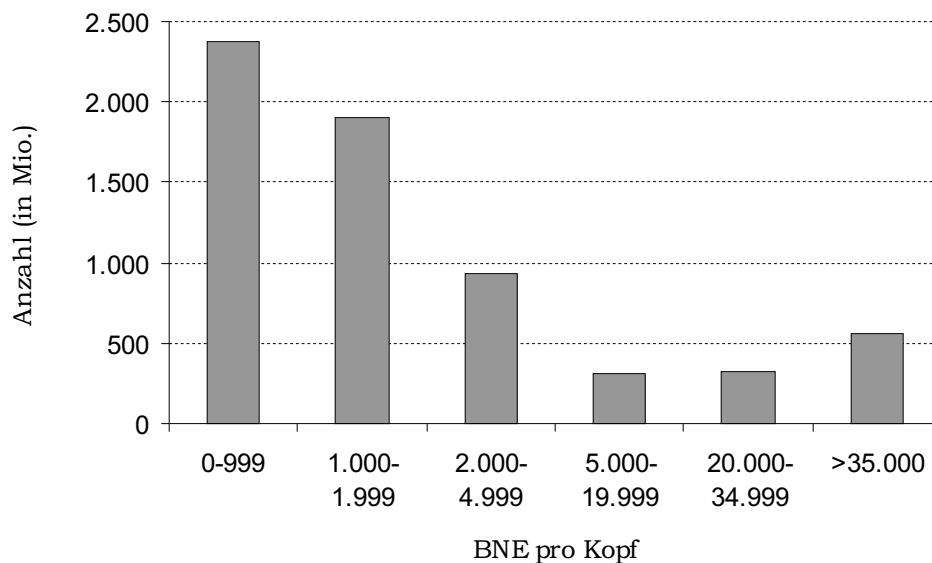


Abbildung 1.2: Weltweites Pro-Kopf-BNE in 2005 (in US-\$). *Quellen:* Weltbank, World Development Indicators (2007) und United Nations Common Database (UNCDB, 2007).

um bestehende Güter billiger zu produzieren (Prozessinnovationen).<sup>7</sup> Niedrigere Preise steigern die Realeinkommen der Menschen.

Eine Variante der Produktinnovation ist die Verbesserung in der Qualität bestehender Produkte. Qualitätsverbesserungen von Produkten werden als sehr wichtige Ursache für Wachstum gesehen und bilden den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. Acemoglu (2007, Kapitel 12) dazu:

„... perhaps most important in practice [is] ... the introduction of a higher-quality version of an existing good.“

Man vergleiche nur einen gängigen Mittelklassewagen von heute mit einem Automobil aus dem beginnenden 20. Jahrhundert.<sup>8</sup> Eine Untersuchung von Bils & Klenow (2001) ergab, dass zwischen 1980 und 1996 die durchschnittliche Wachstumsrate der Qualität von 66 langlebigen Konsumgütern 3,7% p.a. betrug. Auch

<sup>7</sup>In den meisten Modellen ist die Unterscheidung zwischen Produkt- und Prozessinnovationen irrelevant. Sie sind mathematisch analog (vgl. Acemoglu (2007, Kapitel 12)).

<sup>8</sup>Oder mit einer Pferdekutsche, die ja den gleichen Zweck erfüllte: Fortbewegung.

andere Studien finden einen signifikanten Anteil am Wachstum des Inlandsproduktes, der auf Qualitätsverbesserungen zurückzuführen ist. Beispielsweise ergab der Boskin-Report,<sup>9</sup> dass die gewöhnlich gemessene Inflationsrate die tatsächliche um 0,6 Prozent jährlich überzeichnete, weil Qualitätsverbesserungen nicht genügend berücksichtigt wurden, obwohl dies ausdrücklich versucht wurde. Eine geringere tatsächliche Inflationsrate heißt im Umkehrschluss ein höheres reales Wachstum der Ökonomie.<sup>10</sup> Qualitätsverbesserungen sind also eine sehr wichtige Wachstumsquelle.

Dies zeigte auch Nordhaus (1996) exemplarisch in einer sehr einflussreichen Studie über die Entwicklung der Kosten von Licht. Nordhaus argumentiert, dass die (realen) Kosten von Licht, ausgedrückt in Arbeitszeit, die man dafür aufbringen muss, über die letzten 200 Jahre um den Faktor 10.000 gefallen sind. Nordhaus konstruiert darüber hinaus zwei Preisindizes, einen „traditionellen“ und einen, der die „wahren“ Kosten von Licht abbildet. Für den traditionell berechneten verfährt er so, wie statistische Behörden in etwa vorgehen würden. Technische Verbesserungen und Effizienzsteigerungen werden ignoriert. Im zweiten Index bezieht er die Effizienzsteigerungen explizit mit ein, indem er nicht nur die Inputpreise mit berücksichtigt, sondern auch den damit generierten Output (gemessen in „Lumen-Stunden“).<sup>11</sup> Der traditionelle und der wahre Preisindex liefern ein komplett unterschiedliches Bild. Nach ersterem wäre der Preis von Licht gestiegen und nicht drastisch gefallen, wie es der zweite Index abzeichnet. Über den Zeitraum 1830-1992 unterscheidet sich der tatsächliche Preis von Licht und ein traditionell berechneter um ungefähr den Faktor 1.000 (vgl. Nordhaus (1997)).

Abbildung 1.3 verdeutlicht diesen Sachverhalt für den Zeitraum ab 1800. Dass Kerzen durch Walöl-Lampen ersetzt wurden, diese durch Petroleum-Lampen und diese wiederum durch elektrisches Licht und dass diese Neuerungen jedes Mal einen Leistungssprung bedeuteten (gemessen am Output „Lumen-Stunden“), wird in der traditionellen Berechnung nur unzureichend berücksichtigt. Daraus schließt

---

<sup>9</sup>Siehe Boskin, Dulberger, Gordon, Griliches & Jorgenson (1996), Zahlen hier aus Bils & Klenow (2001). Einen kurzen Überblick über die Problematik der Inflationsmessung bei Qualitätsverbesserungen gibt Nordhaus (1998).

<sup>10</sup>Fehler in der Messung der Inflationsrate werfen vielfältige Probleme auf. Beispielsweise kann es zu einer suboptimalen Geldpolitik kommen, wenn die Zentralbank ihre Strategie stark an der Inflationsrate ausrichtet.

<sup>11</sup>Das Licht, das mit einer 75-Watt-Glühbirne in einer Stunde erzeugt wird, entspricht ungefähr 1000 „Lumen-Stunden“.

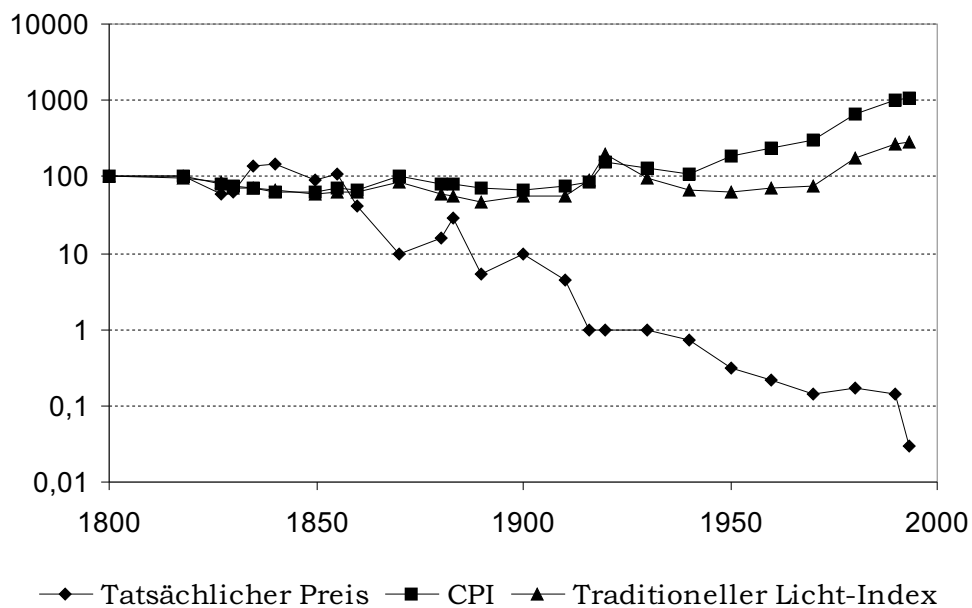


Abbildung 1.3: Entwicklung des tatsächlichen und des traditionell berechneten Preises von Licht (aus Nordhaus (1996)). Basisjahr 1800 (= 100).

Nordhaus, dass die Realeinkommen in den industrialisierten Ländern viel stärker gestiegen sind, als es die offiziellen Statistiken angeben, weil die Preissteigerungen – hauptsächlich aufgrund unberücksichtigter Qualitätsverbesserungen der Güter – viel moderater waren, als es offiziell ausgewiesen wird.

Dieses Beispiel zeigt gleichzeitig einen weiteren wichtigen Aspekt langfristiger wirtschaftlicher Entwicklung. Mit der Erfindung der Walöl-Lampe verloren die Kerzenmacher ihre Geschäftsgrundlage. Die Walfänger wiederum wurden durch das elektrische Licht (fast) arbeitslos. Wirtschaftlicher Fortschritt ist also selten ein „glatter“ Prozess, in dem sich zu vorhandenen Produzenten neue hinzugesellen. Häufig wird eine alte Technologie durch eine neue und bessere ersetzt. Die alte wird dann überflüssig, es kommt zu „kreativer Zerstörung“, wie sie Schumpeter verstanden hat. In seinem Werk „Kapitalismus, Sozialismus und Demokratie“ argumentiert er in Kapitel 7 (1942/46, S. 137), dass qualitative Veränderung der Prozess ist,

„der unaufhörlich die Wirtschaftsstruktur von innen heraus revolutioniert, unaufhörlich die alte Struktur zerstört und unaufhörlich eine

neue schafft. Dieser Prozess der ‘schöpferischen Zerstörung’ ist das für den Kapitalismus wesentliche Faktum.“

In diesem Buch liefert er auch ein Beispiel für den Prozess der kreativen Zerstörung und verdeutlicht deren Wichtigkeit. Schumpeter (1942/46, Kapitel 7, S. 141):

„Im Fall des Detailhandels kommt die entscheidende Konkurrenz nicht von zusätzlichen Ladengeschäften des gleichen Typus, sondern vom Warenhaus, vom Kettengeschäft, vom Postversandgeschäft und von der Warenhalle (supermarket), die früher oder später diese Pyramiden zerstören müssen. Eine theoretische Konstruktion, die dieses wesentliche Element ... vernachlässigt, vernachlässigt alles was am typischsten kapitalistisch daran ist“.

Für Schumpeter war außerdem eine weitere Beobachtung entscheidend für das anhaltende Wachstum einer Ökonomie. Technischer Fortschritt ist kein Nebenprodukt einer anderen Tätigkeit, wie es beispielsweise „Learning by doing“-Modelle oder „AK“- Modelle häufig unterstellen; er resultiert hauptsächlich auch nicht aus staatlich finanzierter Grundlagenforschung, sondern er ist die Folge von zielgerichteten Investitionen profitorientierter Unternehmen. Ein häufig benutztes Schumpeter-Zitat dazu (Schumpeter 1942/46, Kapitel 7, S. 137):

„Der fundamentale Antrieb, der die kapitalistische Maschine in Bewegung setzt und hält, kommt von den neuen Konsumgütern, den neuen Produktions- oder Transportmethoden, den neuen Märkten, den neuen Formen der industriellen Organisation, welche die kapitalistische Unternehmung schafft.“

Zusammen genommen gibt es also zwei wesentliche Merkmale, die Schumpetersche Wachstumsmodelle auszeichnen: gewollte Innovationen gewinnorientierter Unternehmen und „kreative Zerstörung“. <sup>12</sup> Für innovationsbasierte Wachstumsmodelle allgemein definiert Romer (1990a) weitere Prämissen, so dass es zu folgenden Anforderungen Schumpeterscher Wachstumsmodelle kommt:

---

<sup>12</sup>In der Literatur werden Modelle, denen der zweite Aspekt fehlt und die nur das erste Merkmal erfüllen, häufig auch als „Schumpetersche Modelle“ bezeichnet. Wegen der Prominenz, die Schumpeter der „kreativen Zerstörung“ einräumt (siehe obige Zitate), werden diese Modelle hier als innovationsbasierte Modelle bezeichnet, diejenigen mit „kreativer Zerstörung“ als „Schumpetersche Modelle“, die natürlich auch innovationsbasiert sind.

1. Technischer Fortschritt ist der entscheidende Grund für ökonomisches Wachstum.
2. Innovationen sind das Resultat zielgerichteter Investitionen (Forschung) profitorientierter Unternehmen.
3. „Kreative Zerstörung“ ist ein entscheidendes Element im Wachstumsprozess.
4. Ideen (Technologien) sind nicht-rivalisierend in ihrer Nutzung. Diese Nicht-rivalität ist die Ursache von Spillover-Effekten, die letztendlich anhaltendes Wachstum ermöglicht. Allerdings ist sehr wichtig, dass die Nutzung (zumindest teilweise) ausschussfähig ist, damit sich die Fixkosten von Forschung wieder amortisieren können.

Auf den vierten Punkt, der von Romer als der wichtigste erachtet wird, wird im nächsten Kapitel ausführlich eingegangen.

Ziel dieser Arbeit ist es, Wachstumsmodelle zu entwickeln, die diesen Anforderungen genügen.

In Kapitel 7 wird das Romer-Modell (Romer 1990a) so modifiziert, dass auch Punkt 2 der Prämissen erfüllt ist. Anstatt ständig neuer Produkte (horizontale Innovationen) werden bessere Qualitäten bestehender Produkte erfunden (vertikale Innovationen). Nach der Modellbeschreibung und der Herleitung des dynamischen Gleichgewichtes<sup>13</sup> werden die Wohlfahrtseigenschaften untersucht. Wegen unvollkommenen Wettbewerbs und Spillover-Effekten ist die Wachstumsrate im Marktgleichgewicht nicht mit der im sozialen Optimum identisch. Erstere ist immer niedriger, obwohl auch ein negativer externer Effekt in Form eines „business-stealing“-Effekts vorliegt.

Darauf folgend werden in Kapitel 8 die komparative Statik und die Dynamik des Modells genauer untersucht. Es wird gezeigt, dass es unter Umständen (bei bestimmten Konstellationen der Modell-Parameter) zu einer ungewöhnlichen komparativen Statik kommen kann. Eine größere Bevölkerung oder eine höhere Produktivität in F&E steigern dann die Wachstumsrate nicht, wie es im Romer-Modell in Kapitel 2 und anderen innovationsbasierten Wachstumsmodellen der

---

<sup>13</sup>Die Ausdrücke „dynamisches Gleichgewicht“, „Steady state“, „Balanced growth“ oder „Wachstumsgleichgewicht“ werden synonym für eine Situation verwendet, in der alle Mengen mit einer konstanten Rate ( $\geq 0$ ) wachsen (vgl. Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 1)). In der Literatur wird unter Steady State manchmal „balanced growth“ mit Nullwachstum verstanden.

Fall ist, sondern senken sie. Für diese Konstellation wird weiter gezeigt, dass ein Wachstumsgleichgewicht entweder stabil (aber indeterminiert) oder instabil ist. Das bedeutet, dass ein solcher Steady state mit „verdrehter“ komparativer Statik tatsächlich auch erreicht werden kann. Steady states mit „normaler“ komparativer Statik sind sattelpunktstabil.

In Kapitel 9 wird das Romer-Qualitäten-Modell aus Kapitel 7 verallgemeinert, indem horizontale und vertikale Innovationen zugelassen werden. Vorteil dieses Modells gegenüber dem Romer-Modell aus Kapitel 2 und dem Romer-Qualitäten-Modell aus Kapitel 7 ist, dass sowohl neue als auch bessere Produkte möglich sind und beides die Produktivität steigert. Außerdem werden in diesem Modell die Skaleneffekte<sup>14</sup> eliminiert, die in den beiden anderen Modellen auftreten. Eine höhere Forschungs-Produktivität hat dann keine Effekte mehr auf die langfristige Wachstumsrate, sondern nur noch auf das Niveau des Inlandsproduktes. Das Modell gehört damit zur Klasse der „semi-endogenen“ Wachstumsmodelle, die gemeinhin als zutreffendere Beschreibungen realer Ökonomien gelten.

Zuvor werden aber in den Kapiteln 2 - 6 die wichtigsten Modelle der innovationsbasierten Wachstumstheorie, welche die Basis für die Modelle aus den Kapiteln 7 - 9 sind, kurz vorgestellt.

Das Vorgehen ist dabei immer gleich: Als Erstes wird das Modell mit seinen Annahmen beschrieben, dann wird das dynamische Gleichgewicht bestimmt und schließlich werden die Wohlfahrtseigenschaften analysiert. Außerdem wird teilweise die Stabilität des Marktgleichgewichts untersucht.

Grundsätzlich unterscheiden sich die Modelle in dieser Arbeit in der Art der Innovation (horizontale oder vertikale Innovationen oder beide), ob Kapitalakkumulation möglich ist oder nicht, ob Skaleneffekte vorliegen oder nicht, und ob die Bevölkerung wächst oder konstant bleibt. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die einzelnen Merkmale.

---

<sup>14</sup>Skaleneffekt bedeutet, dass Niveaugrößen, wie die Bevölkerungszahl, einen Einfluss auf die langfristige Wachstumsrate haben.

Kap.	Modell	horiz. Inn	vert. Inn.	Kap.akk.	Skaleneff.	Bev.wachs.
2	Romer	ja	nein	ja	ja	nein
3	Jones	ja	nein	ja	nein	ja
4	GH I	ja	nein	nein	ja	nein
5	GH II	nein	ja	nein	ja	nein
7/8	RQM	nein	ja	ja	ja	nein
7.5	RQM	nein	ja	ja	nein	ja
9	RLi	ja	ja	ja	nein	ja

GH I, II: Modelle von Grossman/Helpman

RQM: Romer-Qualitäten-Modell; RLi: Romer-Li-Modell





## Teil II

### Modelle mit zunehmender Produktvielfalt



# Kapitel 2

## Das Romer-Modell

Romer revolutionierte die Wachstumstheorie mit seinem 1990 im *Journal of Political Economy* erschienenen Artikel „Endogenous Technological Change“ und war damit ein maßgeblicher Mitbegründer der „Neuen Wachstumstheorie“. In diesem Artikel entwickelte er das erste Modell eines allgemeinen Gleichgewichts mit andauerndem Produktivitätswachstum, das resultiert, weil gewinnorientierte Firmen auf Märkten mit monopolistischer Konkurrenz Forschung betreiben und technologische Innovationen machen. Diese treten in Form neuer Zwischenprodukte auf.

Ein ähnliches Modell wurde von Grossman und Helpman kurz darauf entwickelt (Grossman & Helpman 1991a, Kapitel 3). Dieses wird in Kapitel 4 vorgestellt. Im darauf folgenden Kapitel wird eine andere Art, Innovationen zu modellieren, aufgezeigt: Im Qualitätenmodell von Grossman und Helpman (Grossman & Helpman 1991a, Kapitel 4) werden nicht neue Produkte, sondern qualitativ bessere erfunden.

In diesem Kapitel wird Romers Modell (1990a) zu Wachstum durch technischen Fortschritt vorgestellt.

### 2.1 Beschreibung des Modells und Annahmen

#### 2.1.1 Ideen und Wissen

Romers Modell beruht auf drei zentralen Beobachtungen. Erstens sieht er technischen Fortschritt als entscheidende Größe hinter ökonomischem Wachstum. Diese Beobachtung ist nicht neu, geht sie doch zumindest auf Solow (1956, 1957) zurück. Nach Solows mathematischer Formulierung rückten in der Wachstumstheorie

aber andere Faktoren in den Vordergrund: Arrow (1962a) und Romer (1986) verwiesen auf die Wichtigkeit von Learning by doing im Wachstumsprozess, Shell (1966) auf Grundlagenforschung und Uzawa (1965) und Lucas (1988) auf Humankapitalakkumulation. Zweitens passiert technischer Fortschritt durch „gewollte Handlungen von Personen, die auf Anreize reagieren“ (Romer 1990a). Gemeint ist, dass technischer Fortschritt hauptsächlich aus Forschung von gewinnorientierten Unternehmern resultiert. Inhaltlich sind diese beiden Beobachtungen bereits von Schumpeter gemacht worden (siehe die Zitate in Kapitel 1).

Die dritte und zugleich wichtigste Annahme ist für Romer die neue Charakterisierung des Gutes „Idee“. Die gängige Unterscheidung, die hauptsächlich auf dem Grad beruht, zu dem die Nutzung des Gutes ausschließbar ist, lautet: „privates“ oder „öffentliches“ Gut. Bei privaten Gütern kann die Nutzung durch Andere i.d.R. gut ausgeschlossen werden, bei öffentlichen nicht. Bei letzteren wird noch zusätzlich unterschieden, ob ihre Nutzung rivalisierend ist, d.h. ob die Nutzung durch eine Person die Nutzung des Gutes durch eine andere beeinträchtigt (z.B. Fischschwärme in internationalen Gewässern, die nur einmal gefangen werden können; oder saubere Luft für ein ganzes Land, die nur einmal verschmutzt werden kann<sup>1</sup>) oder nicht (z.B. nationale Verteidigung, saubere Luft für einen Einzelnen). Die Unterscheidung ist in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

Romer bemerkte aber, dass das Gut „Idee“ in dieses Schema nicht passt. Eine Idee – beispielsweise eine Anleitung zur Herstellung eines Medikaments oder ein ökonomisches Modell, mit dem der Einfluss der Geldmenge auf die Inflationsrate beschrieben werden kann – ist in der Nutzung auch nicht-rivalisierend. Der Grad der Ausschließbarkeit aber kann variieren. Eine chemische Formel ist wahrscheinlich gut ausschließbar (wie z.B. die chemischen Formeln für „Coca-Cola“ oder „Aspirin“), auch gut ausschließbar ist der Quelltext von Software (z.B. Microsofts „Office“ oder „Windows“<sup>2</sup>). Andere Ideen, wie z.B. das Einbauen von Airbags in Autolenkräder oder die Steuerung von Computern über grafische Benutzeroberflächen, sind hingegen schwer ausschließbar.<sup>3</sup> Der Grad der Ausschließbarkeit wird

---

<sup>1</sup>Bei dieser Art von Gütern tritt das „tragedy-of-the-commons“-Problem auf: Die Kosten des Verbrauchs sauberer Luft oder der Ausrottung bedrohter Fischarten werden von Allen getragen, die Vorteile kommen aber nur den einzelnen Nutzern zu Gute (den CO<sub>2</sub>-Emittenten oder Fischern).

<sup>2</sup>Allerdings muss Microsoft nach einem Urteil des „Europäischen Gerichts erster Instanz“ vom September 2007 seinen Quelltext von relevanten Schnittstellen für andere Software-Hersteller offen legen. Von Microsoft wurde das Urteil akzeptiert.

<sup>3</sup>Grafische Benutzeroberflächen stammen zwar vom Soft- und Hardwarehersteller Apple,

	Rivalisierendes Gut	Nicht-rivalisierendes Gut
hoch ↑ Grad der Ausschliess- barkeit ↓ niedrig	private Güter und Dienst- leitungen   öffentliche Güter (Fischerei, Luftverschmutzung)	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; background-color: #f0f0f0;">           Quelltext von Software             chemische Formel (Aspirin, Coca-Cola)             Black-Scholes-Formel             grafische Benut- zoberflächen für Betriebs- systeme         </div> öffentliche Güter (nat. Verteidigung)

Ideen

Abbildung 2.1: Nutzungseigenschaften ausgewählter Güter. (Ähnliche Abbildungen finden sich in Romer (1993), Jones (2002) und Warsh (2006).)

über physische und rechtliche (Patente, copyrights und Urheberrechte) Gegebenheiten bestimmt. Die entscheidenden Ideen für ökonomisches Wachstum sind laut Romer jene, die teilweise ausschließbar sind: Sie dürfen in der Güterherstellung nur vom jeweiligen Lizenznehmer oder Patenthalter verwendet werden, gehen aber frei verfügbar in den allgemeinen Wissenspool ein und dienen als Grundlage für weitere Forschung. Dadurch wird gewährleistet, dass die (oft hohen) Fixkosten in der „Produktion“ einer Idee wieder eingespielt werden, es aber trotzdem zu positiven externen Effekten in Form von Wissens-Spillovern kommt. Die enorme Bedeutung von Innovationen verdeutlichen Grossman & Helpman (1994) mit der folgenden, rhetorischen Frage:<sup>4</sup>

„What would the last century’s growth performance have been like without the invention and refinement of methods for generating electricity and using radio waves to transmit sound, without Bessemer’s discovery of a new technique for refining iron, and without the design and development of products like the automobile, the airplane, the

verhalten aber dem Konkurrenten Microsoft zu seinem durchschlagenden Erfolg.

<sup>4</sup>Mokyr (2005) gibt einen umfangreichen Überblick über die Entwicklungsgeschichte von Erfindungen und den Einfluss auf das Wirtschaftswachstum.

transistor, the integrated circuit, and the computer?“

### 2.1.2 Struktur

Romers Modell besteht aus drei Sektoren (siehe Abbildung 2.1): Im Forschungssektor werden mit Arbeit,  $L_A$ , Konstruktionsanleitungen<sup>5</sup> für neue Varietäten,  $\dot{A}$ , von Kapitalgütern,  $x(j)$ , erfunden. Dabei wird Forschung durch den Stand des technischen Wissens – ausgedrückt durch die verfügbare Anzahl an Varietäten  $A$  – begünstigt. Diese intertemporalen Spillover-Effekte machen langfristiges Wachstum erst möglich. Die verschiedenen Kapitalgüter,  $x(j)$ , werden zusammen mit Arbeit,  $L_Y$ , in der Endproduktherstellung verwendet, wobei der Teil  $c$  von den Haushalten konsumiert wird. Der Rest,  $\dot{K}$ , wird gespart und vergrößert den Kapitalstock.

Die neuen Anleitungen werden durch Patente unbegrenzter Laufzeit geschützt und an den Zwischenproduktsektor höchstbietend versteigert. ZwischenproduktHersteller veredeln Rohkapital mit dem erworbenen Wissen aus den Patenten in höherwertige Kapitalgüter. Ihre Produktionstechnologie ist sehr einfach: aus einer konstanten Menge  $\eta$  an Rohkapital wird ohne weiteren Faktoreinsatz eine Einheit des Kapitalgutes. Diese Technologie sei zur Vereinfachung für alle Varietäten gleich. Die Kapitalgüter unterliegen keiner Abschreibung und können ohne Verluste wieder zurück verwandelt werden. Der Endproduktsektor besteht aus einer Vielzahl kompetitiver Firmen, die gemäß einer identischen Produktionstechnologie mit Kapitalgütern und Arbeit das homogene Endprodukt herstellen. Dieses kann entweder konsumiert werden oder als Input in der Herstellung der Kapitalgüter dienen.<sup>6</sup> Weil eine linear-homogene Produktionsfunktion angenommen wird, kann die Analyse vereinfacht werden, indem anstatt der Vielzahl kompetitiver Firmen eine einzelne, preisnehmende Firma unterstellt wird, der der gesamte Faktoreinsatz in diesem Sektor zur Verfügung steht. Als Konsumenten werden dynastische (ewig fortbestehende) Haushalte unterstellt.<sup>7</sup> Im Folgenden wird das Modell konkret spezifiziert.

---

<sup>5</sup>„Rezepte“, „blueprints“, „(Konstruktions-)Anleitung“, „(technisches) Wissen“, „Ideen“ oder „Innovationen“ werden synonym verwendet.

<sup>6</sup>Es wird also implizit unterstellt, dass Rohkapital mit der selben Technologie produziert wird wie das Endprodukt.

<sup>7</sup>Es könnten genauso gut unendlich lebende „Ramsey-Konsumenten“ angenommen werden oder Konsumenten mit begrenzter Lebenszeit, die das Wohl ihrer Nachkommen gleichberechtigt in das eigene Nutzenkalkül mit einbeziehen (vgl. Barro (1974)).

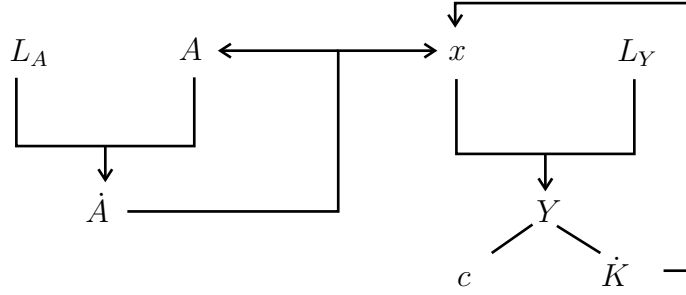


Abbildung 2.2: Die Struktur des Romer-Modells

### 2.1.3 Haushalte

In der Ökonomie gibt es eine konstante Anzahl an Haushalten. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass es sich um ein Kontinuum von Masse eins handelt. Jeder Haushalt hat  $L$  Mitglieder. Die Bevölkerung  $L$  bleibt konstant.<sup>8</sup> Haushalte maximieren die intertemporale Nutzenfunktion

$$U(0) = \int_0^\infty L u(t) e^{-\rho t} dt \quad \text{mit} \quad u(t) = \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad (2.1)$$

gegeben die Haushalts-Budgetbeschränkung<sup>9</sup>

$$\dot{B}(t) + c(t)L = r(t)B(t) + w(t)L.$$

Der Wertpapierbesitz des Haushalts ist  $B(t)$ . Den Ausgaben für Konsum,  $cL$ , und dem Erwerb von Wertpapieren,  $\dot{B}$ , stehen Einkünfte aus Arbeit,  $wL$ , und Wertpapierbesitz,  $rB$ , gegenüber. Jeder Konsument bietet unelastisch eine Einheit Arbeit an, die entweder im Endproduktsektor oder im Forschungssektor eingesetzt werden kann. Die intertemporale Substitutionselastizität wird über den Parameter  $\sigma$  ( $> 0$ ) bestimmt und beträgt  $1/\sigma$ .<sup>10</sup> Der Parameter  $\rho$  gibt die Zeitpräferenzrate an und wird als positiv angenommen. Er drückt aus, dass der Nutzen aus zukünftigem Konsum bei der Nutzenmaximierung weniger stark berücksichtigt wird als der aktuelle Nutzen. Ein positiver Wert von  $\rho$  ist notwendig, damit das Nutzenintegral in (2.1) konvergiert. Bei  $\rho = 0$  und nicht abneh-

<sup>8</sup>Im Modell des nächsten Abschnitts wächst sie hingegen mit Rate  $n$  ( $> 0$ ).

<sup>9</sup>Die Schreibweise mit einem Punkt über einer Variablen steht für die Ableitung nach der Zeit:  $\dot{x} = dx/dt$ . Die Wachstumsrate einer Variable  $x$  wird in der gesamten Arbeit entweder als  $\dot{x}/x$  oder als  $g_x$  geschrieben.

<sup>10</sup>Intertemporale Nutzenfunktionen wie in (2.1) werden deshalb auch „CIES“-Nutzenfunktionen (constant intertemporal elasticity of substitution) genannt.

mendem Konsum ( $c(0) > 0$ ,  $g_c \geq 0$ ) wäre der Ausdruck in (2.1) keine endliche Zahl und das Optimierungsproblem auf diese Weise nicht zu lösen.

In der intertemporalen Nutzenfunktion und der Budgetbeschränkung wurde implizit unterstellt, dass alle Haushalte identisch sind und das gleiche Anfangsvermögen besitzen. Dies ist aber nur eine vereinfachende Annahme. Weil die gewählte Nutzenfunktion homothetisch ist, folgt, dass sich bei Vorliegen unterschiedlicher Anfangsvermögen der Haushalte das gleiche Verhalten für einen durchschnittlichen Haushalt ergibt, als hätten alle Haushalte das gleiche Vermögen und ein repräsentativer Haushalt wird betrachtet. Bei unterschiedlichem Vermögen könnten sich die Haushalte gegenseitig Kredit geben. Diese würden aber in der Budgetbeschränkung des durchschnittlichen Konsumenten nicht auftauchen, weil sie sich gegenseitig aufheben.<sup>11</sup> Nur Wertpapiere, die von Firmen ausgegeben werden, gibt es nach Aggregation in positiver Menge, und nur solche mehrten das Vermögen der Ökonomie. Deshalb werden nur diese sowohl für einen durchschnittlichen Konsumenten als auch für einen repräsentativen Konsumenten berücksichtigt.<sup>12</sup>

### 2.1.4 Endprodukthersteller

Das homogene Endprodukt wird mit einfacher Arbeit,  $L_Y$ , qualifizierter Arbeit („Humankapital“,  $H_Y$ , und Kapitalgütern,  $x(j)$ , gemäß folgender Technologie hergestellt:

$$Y(t) = L_Y^{1-\alpha-\beta} H_Y^\beta \int_0^{A(t)} x(j, t)^\alpha dj,$$

wobei  $0 < \alpha < 1$  und  $0 \leq \beta < 1$  gilt. Das Angebot beider Arten von Arbeit wird als exogen und konstant angenommen. Einfache Arbeit wird nur im Endproduktsektor eingesetzt, qualifizierte Arbeit hingegen auch im Forschungssektor. Außerdem wird eine Vielzahl von Kapitalgütern,  $x(j)$ , eingesetzt, die sich über ein Kontinuum von 0 bis  $A(t)$  erstreckt.<sup>13</sup> Die einzelnen Kapitalgüter,

---

<sup>11</sup>In der „Finance“-Theorie ist diese Eigenschaft als „bucket-shop“-Annahme bekannt (vgl. Merton (1973)).

<sup>12</sup>In Caselli & Ventura (2000) werden weitere Unterschiede der einzelnen Haushalte zugelassen, z.B. unterschiedliche Produktivität der Arbeit oder verschiedene Präferenzen. Es wird gezeigt, dass auch dann die Analyse mit einem repräsentativen Konsumenten geeignet sein kann.

<sup>13</sup>Diese Modellierung geht auf Spence (1976), Dixit & Stiglitz (1977) und Ethier (1982) zurück und wurde als Erstes von Romer (1987) in einem Wachstumsmodell eingesetzt.



$x(j)$ , sind zueinander unvollkommene Substitute. Neue Varietäten von Kapitalgütern (zusätzliche Produktlinien) können durch gezielte Forschung erzeugt werden und erhöhen die Produktion von  $Y$ . Hierin drückt sich aus, dass zunehmende Spezialisierung die Produktivität erhöht. Weiter unten wird gezeigt, dass im Gleichgewicht gleiche Mengen der Sektoren  $j$  eingesetzt werden (symmetrisches Gleichgewicht). Mit  $K \equiv A\eta x$  (siehe (2.20)) vereinfacht sich die Produktionsfunktion dann zu  $Y = L_Y^{1-\alpha-\beta} H_Y^\beta A^{1-\alpha} (K/\eta)^\alpha$ . Die „Totale Faktorproduktivität“ (TFP) – oder auch „Multifaktorproduktivität“ genannt – beträgt dann  $\text{TFP} = A^{1-\alpha} = Y\eta^\alpha / (L_Y^{1-\alpha-\beta} H_Y^\beta K^\alpha)$  und steigt durch F&E, wenn also neue Varietäten erfunden werden.

In der Darstellung des Modells hier wird eine Vereinfachung gemacht: Es gibt nur eine Art von Arbeit, die in der Herstellung des Endproduktes oder in Forschung gebraucht wird. Obwohl es inhaltlich überzeugender ist, dass dies Humankapital sein sollte (v.a. bei Forschung), wird dieser Faktoreinsatz trotzdem mit  $L_Y$  abgekürzt und als „Arbeit“ bezeichnet. Weil aber beide Arten von Arbeit konstant und exogen sind, kann man sich unter  $L_Y$  auch „Humankapital“ vorstellen. Die (vereinfachte) Produktionsfunktion lautet mithin<sup>14</sup>

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x(j)^\alpha dj. \quad (2.2)$$

### 2.1.5 Forschungssektor

Im Forschungssektor werden blueprints für neue Produkte mit Arbeit,  $L_A$ , als einzigem physischen Faktoreinsatz hergestellt. Die Forschungstechnologie lautet

$$\dot{A} = \frac{L_A}{a} A, \quad (2.3)$$

mit  $a (> 0)$  als Produktivitätsparameter. Bereits vorhandenes technisches Wissen,  $A$ , ist ein kostenfreier Input im Forschungsprozess und geht linear in die Produktion ein. Es liegen also starke Spillover-Effekte in Forschung vor. Diese Annahme ermöglicht endogenes Wachstum und wird im folgenden Kapitel noch näher diskutiert.<sup>15</sup>

---

<sup>14</sup>Für die gesamte Arbeit gilt: Falls möglich und wenn es nicht zu Unklarheiten führt, wird der Zeitindex zur besseren Lesbarkeit weggelassen. Die Indizierung erfolgt immer dann wieder, wenn neue zeitabhängige Variablen eingeführt werden und dies verdeutlicht werden soll.

<sup>15</sup>Linearität in  $L_A$  ist nicht notwendig für endogenes Wachstum, vereinfacht aber die Analyse.

Wird eine neue Erfindung gemacht, dann wird sie allgemein zugänglich. Die direkte und kostenlose Verwendung im Zwischenproduktsektor wird allerdings durch unendlich laufende Patente ausgeschlossen.

### 2.1.6 Zwischenprodukthersteller

Die Patente können von den Zwischenproduktherstellern höchstbietend zu  $P_A$  erworben werden und sichern dann ein Recht unendlicher Lebensdauer, diese Varietät zu produzieren. Der Wert eines Patents entspricht den diskontierten künftigen Gewinnen,  $\pi(j)$ , aus der Zwischenproduktherstellung:

$$P_A(j, t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(j, \tau) d\tau. \quad (2.4)$$

## 2.2 Dynamisches Gleichgewicht

Ableiten dieser Gleichung für den Patentwert nach der Zeit liefert die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt<sup>16</sup>

$$r = \frac{\dot{P}_A}{P_A} + \frac{\pi}{P_A}. \quad (2.5)$$

Sie besagt, dass der Kauf eines Patents (die rechte Seite) und eine sichere Anlage (die linke Seite) die gleiche Rendite liefern müssen.  $\pi/P_A$  stellt dabei die „Dividendenrendite“ dar,  $\dot{P}_A/P_A$  den „Kapitalgewinn“ auf das eingesetzte Kapital.

Die Haushalte maximieren die intertemporale Nutzenfunktion aus (2.1) unter Beachtung ihrer Budgetbeschränkung  $\dot{B} + cL = rB + wL$ . Das gesamte Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} U(0) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} L \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{B}(t) &= r(t)B(t) + w(t)L - c(t)L \\ B(0) &= B_0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Gemäß der dritten Gleichung in (2.6) ist ein bestimmter Anfangsbestand an Wertpapieren vorhanden. Gleichung vier ist eine No-Ponzi-Game-Bedingung. Sie

---

<sup>16</sup>Das sich einstellende Gleichgewicht ist symmetrisch: Preise, Mengen und Gewinne sind in jedem Sektor gleich. Der Wert eines Patents damit auch.

schließt aus, dass sich ein Haushalt für immer verschuldet, indem er den Schuldendienst für alte Schulden durch Aufnahme immer neuer Schulden aufbringt.

Sie ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass der Barwert der Ausgaben den Barwert der Einnahmen nicht übersteigen kann:

$$B(0) + \int_0^\infty Lw(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt \geq \int_0^\infty Lc(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt.$$

Diese Bedingung muss für jeden Haushalt erfüllt sein. Hätte ein Haushalt höhere Ausgaben als Einnahmen (inklusive Anfangsvermögen), dann müsste ein anderer Haushalt spiegelbildlich weniger konsumieren, als er sich leisten könnte. Dies würde kein Haushalt wegen positiven Grenznutzens im Konsum (Nicht-Sättigung) akzeptieren.<sup>17</sup> Den Barwert der Konsumausgaben auf die linke Seite gebracht und als Grenzwert geschrieben, ergibt mit  $s(t) \equiv w(t) - c(t)$  als Ersparnissen (die auch negativ sein können)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left[ B(0) + \int_0^h Ls(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt \right] \geq 0. \quad (2.7)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern entspricht dem diskontierten Wertpapierbestand im Zeitpunkt  $h$ . Dies wird wie folgt ersichtlich: Der Wertpapierbestand in  $h$  setzt sich zusammen aus dem Wertpapierbestand in 0, der sich zwischen 0 und  $h$  verzinst, und den Ersparnissen aus jedem Zeitpunkt  $t$ , die sich natürlich auch wieder zwischen  $t$  und  $h$  verzinsen:

$$B(h) = B(0)e^{\int_0^h r(\tau)d\tau} + \int_0^h Ls(t)e^{\int_t^h r(\tau)d\tau} dt.$$

Auf der rechten Seite kann  $\exp[\int_t^h r(\tau)d\tau]$  als  $\exp\{[\int_0^h r(\tau)d\tau] - [\int_0^t r(\tau)d\tau]\}$  geschrieben werden und  $\exp[\int_0^h r(\tau)d\tau]$  kann vor das Integral gezogen werden. Somit folgt

$$B(h)e^{-\int_0^h r(\tau)d\tau} = B(0) + \int_0^h Ls(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung entspricht dem Ausdruck in eckigen Klammern in (2.7). Einsetzen in (2.7) ergibt die No-Ponzi-Game-Bedingung.

---

<sup>17</sup>Siehe Blanchard & Fischer (1989, Kapitel 2). Es gibt aber Ausnahmen, bei denen die No-Ponzi-Game-Bedingung nicht erfüllt sein muss: Beispielsweise, wenn in einem OLG-Modell dynamische Ineffizienz vorliegt (siehe Romer (2001, Kapitel 2 und Kapitel 11)).

Die Hamiltonfunktion in Gegenwartsschreibweise mit  $\xi(t)$  als Schattenpreis von Wertpapieren lautet

$$\mathcal{H}(t) = e^{-\rho t} L \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi(t) \underbrace{[w(t)L + r(t)B(t) - c(t)L]}_{\dot{B}(t)}. \quad (2.8)$$

Daraus ergeben sich folgende notwendige und hinreichende Bedingungen für Optimalität:<sup>18</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial c(t)} = c(t)^{-\sigma} e^{-\rho t} L - \xi(t)L = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial B(t)} = r(t)\xi(t) = -\dot{\xi}(t) \quad (2.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(t)\xi(t) = 0. \quad (2.11)$$

Aus Gleichung (2.9) folgt  $c(t)^{-\sigma} e^{-\rho t} = \xi(t)$ . Diese Bedingung besagt, dass der Grenznutzen aus Konsum (linke Seite) und der aus Sparen (rechte Seite) auf einem optimalen Konsumpfad gleich sein müssen. Der zusätzliche Nutzen für den Haushalt aus einer marginalen Konsumeinheit (pro Kopf) heute muss genau dem Nutzenverlust durch weniger künftigen Konsum, der über den Schattenpreis  $\xi(t)$  bestimmt wird, entsprechen.

Die Transversalitätsbedingung (2.11) kann mit  $u'(t) = c^{-\sigma}$  und (2.9) zu  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t)u'(t) \exp(-\rho t) = 0$  umgeformt werden und hat folgende Interpretation: Sollte für  $t \rightarrow \infty$  ein positiver Wertpapierbestand vorhanden sein, dann darf er den Konsumenten keinen Nutzen mehr stiften ( $\xi(t) = u'(t) = 0$ ). Umgekehrt dürfen, wenn die Haushalte nicht gesättigt sind und Konsum positiv bewerten ( $\xi(t) > 0$ ), keine Wertpapiere übrig bleiben ( $B(t) = 0$ ). In Gleichung (2.10) wird die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises  $\xi(t)$  bestimmt. Eine zusätzliche Einheit eines Wertpapiers in  $t$  hat nicht den gleichen „Nutzenwert“ wie eine zusätzliche Einheit später, weil Wertpapiere sich verzinsen. Das zusätzliche Wertpapier in  $t$  ist  $r dt$  mal soviel wert wie in  $t + dt$ . Das bedeutet, dass dieser „Nutzenwert“ mit Rate  $r$  fallen muss.

Ableiten von  $\xi(t) = c(t)^{-\sigma} e^{-\rho t}$  nach  $t$ , mit (2.10) Gleichsetzen und Umformen liefert die übliche Ramsey-Regel<sup>19</sup> für den optimalen Konsumpfad:

<sup>18</sup>Dass die Bedingungen auch hinreichend sind, folgt aus der Konkavität von  $\mathcal{H}$  in  $(c, B)$  (Theorem von Mangasarian). Siehe Sydsæter, Hammond, Seierstad & Størm (2005, Kapitel 9).

<sup>19</sup>Oft auch als Keynes-Ramsey-Regel bezeichnet, weil Frank Ramsey bei der Formulierung seiner Theorie von John M. Keynes maßgeblich unterstützt wurde.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\sigma}. \quad (2.12)$$

Der Pro-Kopf-Konsum steigt, wenn der Marktzins die Diskontrate übersteigt.<sup>20</sup>

Weil der Zinssatz,  $r$ , in der Budgetbeschränkung steht und keine Anteile an Unternehmensgewinnen, wurde implizit angenommen, dass es nur festverzinsliche Wertpapiere gibt. Die Wertpapiere in der Ökonomie sind die Ansprüche auf das Kapital der Endprodukthersteller und die Anteile an den Zwischenproduktherstellern:

$$B = K + P_A A.$$

Somit wären die Zwischenproduzenten alle fremdfinanziert, der Ausdruck  $P_A A$  müsste sich auch mit  $r$  verzinsen. Bei Eigenfinanzierung würde aber die gleiche Bedingung für einen optimalen Konsumpfad folgen. Wegen vollkommener Kapitalmärkte gilt das Theorem von Modigliani und Miller (Modigliani & Miller 1958), nach dem die Finanzstruktur keine realwirtschaftlichen Auswirkungen hat. Die Budgetbeschränkung der Haushalte bei Eigenfinanzierung der Unternehmen würde lauten:<sup>21</sup>  $cL + P_A \dot{A} + \dot{K} = wL + \pi A + \dot{P}_A A + rK$ . Die Ausgaben für Konsum,  $cL$ , Aktien der neuen Zwischenprodukthersteller,  $P_A \dot{A}$ , und für neues Kapital,  $\dot{K}$ , werden finanziert über Lohneinkommen,  $wL$ , Einkommen aus Gewinnausschüttungen der Unternehmen,  $\pi A$ , Kursgewinnen,  $\dot{P}_A A$ , und Kapitaleinkommen,  $rK$ . Die Ausgaben für neue Wertpapiere sind  $\dot{K} + P_A \dot{A} =$

---

<sup>20</sup>Das Maximierungsproblem kann auch auf eine andere, ebenfalls sehr verbreitete Weise gelöst werden. Definiere dazu  $\tilde{\xi}(t) \equiv \xi(t) \exp(\rho t)$  als Schattenpreis von Einkommen in  $t$  in Nutzeneinheiten von  $t$ . Damit lautet die Hamiltonfunktion in Momentanschreibweise  $\tilde{\mathcal{H}} = L u(t) + \tilde{\xi}(t) [w(t)L + r(t)B(t) - c(t)L] = \mathcal{H} \exp(\rho t)$ . Als erste notwendige Bedingung ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(t)}{\partial c(t)} = u'(t)L - \tilde{\xi}(t)L = 0$$

und ist gleich  $\exp(\rho t) \mathcal{H}(t) / \partial c(t)$ . Die zweite Bedingung ist wegen Gleichung (2.10)  $\partial \tilde{\mathcal{H}}(t) / \partial B(t) = \tilde{\xi}(t)r(t) = \exp(\rho t) \partial \mathcal{H}(t) / \partial B(t) = -\exp(\rho t) \dot{\xi}(t)$ . Für  $\dot{\xi}(t)$  folgt  $\dot{\xi}(t) = -\rho \tilde{\xi}(t) \exp(-\rho t) + \dot{\tilde{\xi}}(t) \exp(-\rho t)$ , so dass sich für die zweite Bedingung ergibt:

$$\frac{\tilde{\mathcal{H}}(t)}{\partial B(t)} = \tilde{\xi}(t)r(t) = \rho \tilde{\xi}(t) - \dot{\tilde{\xi}}(t).$$

Aus der Transversalitätsbedingung wird  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) \tilde{\xi}(t) \exp(-\rho t) = 0$ . Über die ersten zwei Optimalitätsbedingungen kann wieder die Ramsey-Regel hergeleitet werden.

<sup>21</sup>Hierbei wird wieder die Symmetrie-Eigenschaft verwendet: Im Gleichgewicht sind mit den Preisen und Mengen auch die Gewinne der Zwischenprodukthersteller einheitlich. Dies wird weiter unten gezeigt.

$wL - cL + \pi A + rK + \dot{P}_A A$ . Die Hamiltonfunktion lautet dann

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} L \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi \left( wL - cL + \pi A + rK + \dot{P}_A A \right).$$

Aus  $\partial \mathcal{H} / \partial c = 0$  ergibt sich dann:  $\dot{\xi} / \xi = -\rho - \dot{c} / c$ . Als Optimalitätsbedingung für die Zustandsvariable Kapitalstock,  $K$ , erhält man

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial K} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} = \xi r = -\dot{\xi}.$$

Eine zusätzliche Kapitaleinheit erhöht den Bestand an Wertpapieren genau um eins, da Kapital als nicht konsumierter Output das Numeraire-Gut ist. Für die Zustandsvariable  $A$  folgt

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial A} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} P_A = \xi(\pi + \dot{P}_A) = -\dot{\xi} P_A.$$

Die Aktie eines zusätzlichen Zwischenproduktherstellers hat den Wert  $P_A$  und erhöht damit den Wertpapierbestand um diesen Betrag. Der Ausdruck  $\pi + \dot{P}_A$  ist über die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt, Gleichung (2.5), gleich mit  $rP_A$ . Die letzte und die vorletzte Gleichung sind somit äquivalent. Aus  $\dot{\xi} / \xi = -\rho - \dot{c} / c = -r$  ergibt sich durch einfache Umformungen wieder die Ramsey-Regel (2.12).

Aus (2.3) sieht man direkt, dass die Wachstumsrate des technischen Wissens von  $L_A$ , der eingesetzten Arbeit in F&E abhängt:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{L_A}{a}.$$

Zur Berechnung der gleichgewichtigen Wachstumsrate muss also dieser Arbeits-einsatz berechnet werden. Natürlich ist damit gleichzeitig auch  $L_Y (= L - L_A)$ , die eingesetzte Arbeit im Endproduktsektor, festgelegt. Bestimmt wird die Aufteilung über die gezahlten Löhne, die in beiden Sektoren im Gleichgewicht gleich sein müssen und den jeweiligen Grenzprodukten entsprechen.

F&E-Firmen stellen so lange Arbeiter ein, wie ihr Grenzerlös größer ist als ihre Grenzkosten. Der Grenzerlös ist die Anzahl neuer Patente, multipliziert mit ihrem Wert, der sich über (2.4) bestimmt. Die Grenzkosten sind die Lohnkosten  $w$ . Mit (2.3) lautet das Maximierungsproblem

$$\max_{L_A} P_A \frac{L_A}{a} A - w L_A.$$

Im Gleichgewicht mit  $L_A > 0$  folgt die Nullgewinnbedingung

$$\frac{P_A A}{a} = w. \quad (2.13)$$

Wegen freien Marktzutritts machen F&E-Firmen also keine Gewinne. Wären die Grenzerlöse nicht hinreichend hoch, weil die künftigen Gewinne zu gering sind oder Forschung zu unproduktiv ist, dann wäre  $P_A A < w L_A$  und es würde keine Forschung betrieben:  $L_A = 0$ .<sup>22</sup>

Firmen im Endproduktsektor maximieren ihre Gewinne ebenfalls in einem kompetitiven Umfeld, d.h. sie nehmen die Preise als gegeben hin:

$$\max_{L_Y, x(j)} p_Y Y - w L_Y - \int_0^A p(j) x(j) dj.$$

$w$  ist der Lohn für die eingesetzte Arbeit  $L_Y$ .  $p(j)$  und  $x(j)$  sind Preis bzw. nachgefragte Menge von Produkt  $j$ . Mit  $Y$  als Numeraire (d.h.  $p_Y = 1$ ) erhält man die Bedingung erster Ordnung

$$w = (1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y}. \quad (2.14)$$

Diese Gleichung und Gleichung (2.13) bestimmen die Allokation der Arbeit:

$$(1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y} = \frac{P_A A}{a}. \quad (2.15)$$

Als nächstes werden die Patentwerte,  $P_A$ , und die Gewinne,  $\pi$ , bestimmt.

Die zweite Bedingung erster Ordnung des Gewinnmaximierungsproblems der Endprodukthersteller lautet

$$x(j) = \left[ \frac{\alpha L_Y^{1-\alpha}}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.16)$$

Gegeben diese (im Preis fallende) Nachfrage<sup>23</sup> maximieren die Zwischenprodukt-hersteller ihre Gewinne  $p(j)x(j) - rK(j)$ , wobei  $K(j)$  das von Hersteller  $j$  ein-

<sup>22</sup>Im Folgenden wird  $L_A > 0$  immer vorausgesetzt. Wäre  $L_A$  gleich null, dann wäre die Ökonomie wegen fallender Grenzerträge des Kapitals im Steady state stationär.

<sup>23</sup>Die Preiselastizität der Nachfrage beträgt, genau wie die Substitutionselastizität,  $-1/(1 - \alpha)$ . Die Substitutionselastizität ist definiert als

$$\frac{d[x(j)/x(j')]}{d[p(j)/p(j')]} \frac{p(j)/p(j')}{x(j)/x(j')},$$

und gibt die (prozentuale) Änderung der relativen Einsatzmenge zweier Güter bei einer (prozentualen) Änderung des relativen Preises an.

gesetzte Kapital ist und  $rK(j)$  die Kapitalkosten. Weil  $\eta$  Einheiten „Rohkapital“ genau eine Einheit des Kapitalgutes liefern, folgt

$$\max_{p(j)} \pi(j) = [p(j) - r\eta] x(j) = [p(j) - r\eta] \left[ \frac{\alpha L_Y^{1-\alpha}}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.17)$$

wobei die einmaligen Ausgaben für das Patent hier noch nicht berücksichtigt wurden. Die optimalen Preise und Mengen und die sich ergebenden Gewinne lauten<sup>24</sup>

$$p(j) = p = \frac{r\eta}{\alpha}, \quad x(j) = x = \left( \frac{\alpha^2 L_Y^{1-\alpha}}{r\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \pi(j) = \pi = \alpha(1 - \alpha) \frac{Y}{A} \quad (2.18)$$

und sind für alle Zwischenproduzenten gleich. Bei den Preisen ergibt sich die übliche Aufschlagsregel auf die Grenzkosten  $r\eta$ . Je kleiner  $\alpha$  ( $\in (0, 1)$ ) ist, desto kleiner ist die Substitutionselastizität zwischen zwei Gütern, desto schlechter kann bei einer Preiserhöhung auf andere Güter ausgewichen werden und desto größer ist der Preisaufschlag, den die Kapitalguthersteller verlangen können.

Nun kann nach einem dynamischen Gleichgewicht gelöst werden, in dem die Mengen mit konstanter Rate wachsen und der Zinssatz gleich bleibt. Weil die Zinsen im Steady state konstant sind, bleiben auch die Preise konstant. Im Steady state muss der Anteil der Arbeit, der im Endproduktsektor eingesetzt wird, gleich bleiben. Deshalb sind mit den Preisen auch die nachgefragten Mengen in (2.18) konstant. Aus  $Y = L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha$  folgt zusätzlich, dass  $Y$  und  $A$  mit der gleichen Rate wachsen:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A}.$$

Somit sind auch die Gewinne in (2.18) konstant.

Umformen der Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt, Gleichung (2.5), ergibt

$$r - \frac{\dot{P}_A}{P_A} = \frac{\pi}{P_A}.$$

Weil die linke Seite der Gleichung im Steady state konstant ist, muss auch die rechte Seite konstant sein. Die rechte Seite ist konstant, wenn der Patentwert in der Zeit gleich bleibt ( $\dot{P}_A = 0$ ), weil die Gewinne sich nicht ändern. Es folgt

$$P_A = \frac{\pi}{r}. \quad (2.19)$$

---

<sup>24</sup>Siehe den Appendix zu diesem Kapitel für eine Herleitung.



Der aggregierte Kapitalstock kann definiert werden als

$$K \equiv \int_0^A K(j) dj = \int_0^A \eta x(j) dj = A\eta x. \quad (2.20)$$

Weil die nachgefragten Mengen an Kapitalgütern,  $x$ , konstant sind, folgt für die Wachstumsrate des Kapitalstocks im Steady state

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A}.$$

Mit (2.20) lässt sich (2.2) in eine Form bringen, die einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion des Solow-Modells mit arbeitsvermehrendem technischem Fortschritt recht ähnlich ist:<sup>25</sup>

$$Y = MK^\alpha (AL_Y)^{1-\alpha}, \quad (2.21)$$

mit  $M \equiv \eta^{-\alpha}$ . Tatsächlich möchte Romer sein Modell als erweitertes Solow-Modell verstanden wissen (Romer 1990a, S.99):

„The model presented here is essentially the one-sector neoclassical model with technological change, augmented to give an endogenous explanation of the source of the technological change.“

Schließlich bleibt noch zu zeigen, dass der Pro-Kopf-Konsum auch mit der gleichen Rate wächst. Das Endprodukt kann konsumiert oder als „Rohkapital“ verwendet werden:  $Y = cL + \dot{K}$ . Umformen und Teilen durch  $Y$  ergibt

$$\frac{cL}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K} \frac{K}{Y}. \quad (2.22)$$

Weil  $\dot{K}/K = \dot{A}/A = \dot{Y}/Y$  gilt, ist die rechte Seite konstant. Deshalb müssen auch  $cL$  und  $Y$  mit der gleichen Rate wachsen. Weil die Bevölkerungszahl nicht zunimmt, wachsen auch die entsprechenden Pro-Kopf-Größen mit der gleichen Rate. Zusammen:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} \equiv g. \quad (2.23)$$

Nun kann der Arbeitseinsatz im Endproduktsektor bestimmt werden. Einsetzen von (2.19) und des Ausdrucks für die Gewinne aus (2.18) in (2.15) ergibt

---

<sup>25</sup>Siehe Romer (2001, Kapitel 2).

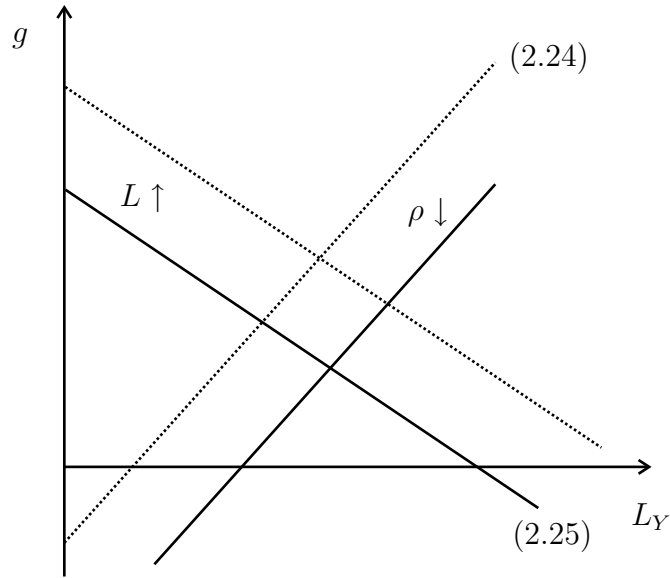


Abbildung 2.3: Wachstumsrate und komparative Statik

$L_Y = ar/\alpha$ . Mit der Ramsey-Regel und (2.23) erhält man schließlich einen Ausdruck für  $L_Y$ , der nur noch die Wachstumsrate  $g$  als endogene Variable enthält:

$$L_Y = \frac{a}{\alpha}(\sigma g + \rho). \quad (2.24)$$

Einen zweiten Ausdruck in diesen zwei Variablen erhält man über  $L_A = ag$  (aus (2.3)) und der Gleichgewichtsbedingung auf dem Arbeitsmarkt ( $L_A = L - L_Y$ ):

$$L_Y = L - ag. \quad (2.25)$$

Diese zwei Gleichungen bestimmen schließlich die Allokation der Arbeit und die gleichgewichtige Wachstumsrate (siehe Abbildung 2.3):

$$g = \frac{\alpha \frac{L}{a} - \rho}{\alpha + \sigma}$$

bzw.

$$g = \frac{\alpha}{a\alpha + a\sigma} \left( L - \frac{a\rho}{\alpha} \right). \quad (2.26)$$

Die Bevölkerungsgröße,  $L$ , hat in diesem Modell einen Einfluss auf die langfristige Wachstumsrate. Eine größere Bevölkerung, eine höhere Produktivität im Forschungssektor (d.h. ein kleineres  $a$ ), eine niedrigere Zeitpräferenzrate,  $\rho$ , und

eine größere intertemporale Substitutionselastizität (ein kleineres  $\sigma$ ) steigern die Wachstumsrate. Ebenso erhöht ein größerer Wert von  $\alpha$  die Wachstumsrate.<sup>26</sup>

## 2.3 Skaleneffekte

Allerdings zeigte Jones (1995a, 1995b) in empirischen Analysen langfristiger Wachstumsdaten, dass diese Eigenschaft der Realität nicht gerecht wird.<sup>27</sup> Die langfristige Wachstumsrate des Inlandsproduktes ist relativ konstant geblieben.<sup>28</sup> Faktoren aber, denen die endogene Wachstumstheorie nach Romer starke Auswirkungen auf die Wachstumsrate zuspricht, haben sich häufig signifikant verändert. Beispielsweise ist das Arbeitskräftepotential – zum einen wegen Bevölkerungswachstums, zum anderen wegen einer höheren Partizipation der weiblichen Bevölkerung – stark gestiegen. Gleichzeitig hat sich in den USA und den G5-Ländern (Deutschland (West), Frankreich, Großbritannien, Japan, USA) zwischen 1950 und 1993 auch die Forschungsintensität<sup>29</sup> vervierfacht (Jones 2002b). Dies sollte die Wachstumsrate des Inlandsproduktes erhöhen, was es aber nicht tat. Endogene Wachstumsmodelle mit der Eigenschaft solcher „Skaleneffekte“ sind deshalb empirisch fragwürdig und müssen modifiziert werden.<sup>30</sup>

Konkret richtet sich die Kritik gegen die „Produktionsfunktion“ von neuem Wissen durch F&E.<sup>31</sup> Diese wird in Gleichung (2.3) spezifiziert, ist aber ziem-

---

<sup>26</sup>Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Ableiten der Wachstumsrate nach  $\alpha$  ergibt

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\frac{L}{a}(\alpha + \sigma) - \alpha \frac{L}{a} + \rho}{(\alpha + \sigma)^2}.$$

Der Nenner dieses Bruchs ist immer positiv, der Zähler vereinfacht sich zu  $\sigma L/a + \rho$  und ist auch immer positiv.  $\partial g/\partial \alpha$  ist damit größer null.

<sup>27</sup>Für einen kurzen Überblick siehe Jones (1999).

<sup>28</sup>Für die USA ermittelt er ein durchschnittliches Wachstum von 1,75% zwischen 1870 und 1929, und 1,95% zwischen 1950 und 1994 (Jones 2002b, S.220).

<sup>29</sup>Definiert als Anteil von Wissenschaftlern und Ingenieuren an der gesamten Beschäftigung.

<sup>30</sup>Wie am Anfang beschrieben, ist bei Romer (1990a) die relevante Größe das gesamte Humankapital in der Ökonomie. Geht man davon aus, dass dieser Bestand mit der Anzahl an Personen eng verknüpft ist, dann trifft die Kritik genauso auch auf die ursprüngliche Version des Modells zu.

<sup>31</sup>Alternativ könnte man auch die Annahme konstanter Skalenerträge in den physischen Faktoren in der Güterproduktion angreifen. Diese ist aber mit dem sog. Replikationsargument schlüssig verteidigbar: Angenommen, eine Fabrik produziert einen bestimmten Output  $Y$  mit  $K$  Einheiten Kapital und  $L$  Einheiten Arbeit. Kopiert man diese Fabrik 1:1, dann gibt es keinen schlüssigen Grund, warum das Duplikat nicht die gleiche Menge  $Y$  produzieren sollte. Die doppelte Inputmenge sollte also auch die doppelte Outputmenge liefern. Dies ist genau die Definition für konstante Skalenerträge. Desweiteren lässt dieses Argument auf zunehmende

lich willkürlich. Sie ist ein Spezialfall einer allgemeineren Form, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

Vorher werden aber noch die Wohlfahrtseigenschaften des Modells untersucht.

## 2.4 Wohlfahrt

Um zu untersuchen, ob die durch das Marktgleichgewicht erreichte Ressourcenallokation optimal ist, wird die Wachstumsrate berechnet, die resultieren würde, wenn ein wohlwollender sozialer Planer die Ressourcen der Ökonomie nach Belieben aufteilen könnte: das Endprodukt zwischen Konsum und Kapitalakkumulation und die verfügbare Arbeit zwischen dem Forschungs- und dem Endproduktsektor. Die Zielfunktion ist die intertemporale Nutzenfunktion aus (2.1). In dieser wird die Diskontrate,  $\rho$ , als positiv angenommen. Allerdings stellt sich die Frage, ob ein wohlwollender sozialer Planer künftige Generationen weniger berücksichtigen sollte als momentan lebende. An dieser Fragestellung, wie ein Konsumpfad (und damit das Sparen) im sozialen Optimum einer Volkswirtschaft aussehen sollte, hat Ramsey bereits 1928 gearbeitet (Ramsey 1928). Er vertrat die Auffassung, dass aus der Sicht eines wohlwollenden sozialen Planers eine Diskontierung künftigen Nutzens ethisch nicht vertretbar ist. Allerdings lassen sich auch Argumente finden, die aus ethischen Gesichtspunkten für eine Diskontierung sprechen: 1. Weil Ökonomien durch die Anstrengungen momentan lebender Generationen wachsen, sind künftige Generationen reicher als diese. Übermäßiges Sparen zu Gunsten wirtschaftlich besser gestellter Nachkommen scheint nicht gerechtfertigt zu sein. 2. Außerdem ist es ja nicht ganz unwahrscheinlich, dass es aufgrund einer verheerenden Katastrophe keine künftigen Generationen gibt. Einen Abschlag bei der Berücksichtigung künftigen Nutzens wegen dieser Unsicherheit sollte auch ein sozialer Planer berücksichtigen. Dieser Abschlag kann über  $\rho$  einfach integriert werden. Aus diesen Gründen wird auch für die zentral geplante Ökonomie eine positive Diskontrate unterstellt.

Die Wahl von  $\rho$  hat einen entscheidenden Einfluss bei der Beurteilung von Politikmaßnahmen, die ferne Generationen betreffen. Bei  $\rho = 0,1\%$  ist eine Nutzeneinheit in 100 Jahren heute 0,9 wert, bei  $\rho = 1\%$  nur noch 0,37 und bei

---

Skalenerträge schließen, wenn sämtliche Inputs, also auch das technische Wissen, berücksichtigt werden. Wird neben den physischen Inputs auch das in der Produktion eingesetzte technische Wissen verdoppelt, dann sollte die neue Fabrik mehr produzieren können als die alte (siehe Romer (1990b)).

$\rho = 3\%$  sogar nur 0,05. Für noch höhere Werte von  $\rho$  ist Nutzen in 100 Jahren praktisch vernachlässigbar. Tatsächlich ist über den sog. „Stern-Report“, der die ökonomischen Folgen des globalen Klimawandels quantifiziert, genau die Diskussion entbrannt, welche Diskontrate für den Nutzenverlust künftiger Generationen, verursacht durch den Klimawandel, zu wählen ist.<sup>32</sup> In dieser Studie wird  $\rho$  mit 0,1% veranschlagt. Bei höheren Werten würde ein eventuell eintretender Nutzenverlust durch die Erderwärmung so stark diskontiert, dass er keine Vermeidungskosten heute rechtfertigen würde, weil die Erderwärmung sich erst in vielen Jahrzehnten signifikant bemerkbar macht. Kritiker wenden gegen dieses Argument allerdings ein, dass es drastische Implikationen hat: Jede Handlung, durch die künftige Generationen auch nur kleine Nutzenverluste hinnehmen müssten, würde heute enormen Aufwand zur Vermeidung dieser negativen Folgen rechtfertigen, weil unendlich viele künftige Generationen unterstellt werden, die betroffen wären und die in das Nutzenkalkül mit einbezogen werden.

Die Kontrollvariablen des sozialen Planers sind der Konsum und der Arbeitseinsatz in F&E. Restriktionen sind die Gleichungen für Kapital- und Wissensakkumulation und die Bevölkerungsgröße.

Mit (2.21) lautet das Maximierungsproblem<sup>33</sup>

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} U(0) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} L \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{K}(t) &= MK^\alpha (AL_Y)^{1-\alpha} - c(t)L \\ \dot{A}(t) &= \frac{L_A}{a} A(t) \\ L &= L_A + L_Y. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Fasst man die erste und die dritte Nebenbedingung zusammen, dann lautet die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} L \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi_1 [BK^\alpha A^{1-\alpha} (L - L_A)^{1-\alpha} - cL] + \xi_2 \frac{L_A}{a} A. \tag{2.28}$$

Aus den notwendigen Bedingungen  $\partial \mathcal{H} / \partial c = 0$ ,  $\partial \mathcal{H} / \partial L_A = 0$ ,  $\partial \mathcal{H} / \partial K = -\dot{\xi}_1$  und  $\partial \mathcal{H} / \partial A = -\dot{\xi}_2$  folgt

---

<sup>32</sup>Siehe Stern (2006) für den Report und Nordhaus (2006) und Nordhaus (2007) für eine kritische Beurteilung.

<sup>33</sup>Auch in der Allokation des sozialen Planers liegt Symmetrie vor: Wegen der fallenden Grenzprodukte der Kapitalgüter würde er Rohkapital gleichmäßig auf die verschiedenen Sektoren  $j$  aufteilen.

$$\xi_1 = e^{-\rho t} c^{-\sigma} \quad (2.29)$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{A(L - L_A)}{a(1 - \alpha)Y} \quad (2.30)$$

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = -\alpha \frac{Y}{K} \quad (2.31)$$

$$\frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} = -\frac{\xi_1}{\xi_2}(1 - \alpha)\frac{Y}{A} - \frac{L_A}{a}. \quad (2.32)$$

Aus (2.31) folgt für einen gleichgewichtigen Wachstumspfad  $\dot{Y}/Y = \dot{K}/K$ . Logarithmisches Differenzieren von (2.21) liefert dann  $\dot{Y}/Y = \dot{A}/A$ . Schließlich folgt aus der umgeformten Gleichung für Kapitalakkumulation (Gleichung (2.22)), dass auch  $c$  und  $Y$  mit der gleichen Rate wachsen. Somit gilt (2.23) auch hier.

Ableiten von (2.29) nach der Zeit ergibt mit (2.23)

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = -\rho - \sigma g.$$

Einsetzen von (2.30) in (2.32) liefert

$$\frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} = -\frac{L}{a}.$$

Aus (2.30) folgt zusätzlich

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2},$$

weil  $Y$  und  $A$  mit der gleichen Rate wachsen. Die letzten drei Gleichungen zusammen ergeben nun die Wachstumsrate im Optimum

$$g = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{L}{a} - \rho \right)$$

bzw.

$$g = \frac{\alpha}{a\sigma} \left( \frac{L}{\alpha} - \frac{a\rho}{\alpha} \right). \quad (2.33)$$

Ein Vergleich von (2.33) mit (2.26) zeigt, dass die gleichgewichtige Wachstumsrate niedriger ist als die Wachstumsrate im Optimum: Sowohl der Ausdruck in Klammern als auch der Bruch davor sind in (2.26) kleiner als in (2.33).

Grund ist, dass wegen zwei positiver Externalitäten zu wenig Forschung betrieben wird und der private Anreiz zu forschen geringer ist als die sozialen Gewinne. Eine Externalität sind die Wissens-Spillover, durch die andere Forscher begünstigt werden, ohne den ursprünglichen Erfinder zu kompensieren. Die andere Externalität ist der sog. „consumer-surplus-effect“: Wegen fallender Nachfragen ist der Wohlfahrtsgewinn einer Innovation für den Konsumenten (über die kompetitiven Endprodukthersteller) größer als die Profite, die die F&E-Firmen sich aneignen können.

Es gibt also in diesem Modell für den Staat die Möglichkeit, durch entsprechende Eingriffe das Marktergebnis zu verbessern.

## 2.5 Stabilität

In Arnold (2000a) wird gezeigt, dass das Marktgleichgewicht sattelpunktstabil ist. Arnold reduziert dazu das System auf drei autonome Differentialgleichungen, die die Dynamik des gesamten Modells abbilden. Zur Stabilitätsanalyse wird dieses drei-dimensionale System um den Steady state linearisiert. Die Vorzeichen der Eigenwerte des linearisierten Systems legen die Stabilitätseigenschaften fest und werden über das Routh-Hurwitz-Theorem bestimmt. Im Romer-Modell sind zwei Eigenwerte positiv und einer negativ. Dies bedeutet Sattelpunktstabilität.<sup>34</sup> Weiter beweist Arnold (2000b), dass auch der Steady state in der optimalen Allokation sattelpunktstabil ist, und berechnet die optimalen Staatseingriffe.

## 2.6 Schlussbemerkung

Romer leistete mit seinem Modell einen bemerkenswerten Beitrag zur modernen Wachstumstheorie. Die Modellierung von unvollkommenem Wettbewerb in einem dynamischen allgemeinen Gleichgewicht ist seitdem Standard in der modernen Wachstumstheorie.

Aber auch konkrete Politik – v.a. die Wettbewerbspolitik – wurde durch diese Arbeit (und folgende) stark beeinflusst. So hat sich die Sichtweise über Monopole und Unternehmen mit marktbeherrschenden Stellungen seither gewandelt, weil der spezielle Charakter des Gutes „Idee“ (hohe Fixkosten in der Entwick-

---

<sup>34</sup>In Kapitel 8.1 findet sich ein kurzer Überblick über die Stabilitätsanalyse von dynamischen Modellen.

lung, aber Grenzkosten von null wegen der Nicht-Rivalität in der Nutzung) erst herausgearbeitet wurde. Auch die Frage, warum es Patente gibt, die einem Unternehmen eine temporäre Monopolstellung sichern, wurde mit den Arbeiten der neuen Wachstumstheorie besser begründbar.

Früher wurde bei Monopolen der negative Aspekt, dass sie die Markteffizienz durch zu hohe Preise beeinträchtigen, stärker betont. Mittlerweile hat sich die Ansicht durchgesetzt, dass marktbeherrschende Stellungen in bestimmten Bereichen – zumindest zeitweise – geduldet werden müssen, weil Unternehmen ihre oft sehr hohen Fixkosten bei der Produktentwicklung durch Preise oberhalb der Stückkosten wieder einspielen können müssen. Könnten sie das nicht, dann würden sie keine Forschung betreiben, was äußerst schädlich für die Entwicklungsaussichten einer Volkswirtschaft wäre. Märkte, die vom neoklassischen Ideal vollkommener Konkurrenz abweichen und damit nicht Pareto-effizient sind, müssen also nicht immer bekämpft werden. Monopolpreise können eine Form der „Forschungsfinanzierung“ privater Unternehmen sein und damit gesellschaftlich vorteilhaft. Drei drastische Beispiele: 1. Die neuste Version des Microsoft-Betriebssystems Windows „Vista“ benötigte in fünf Jahren Entwicklungszeit die Arbeit von 8000 Programmierern. Sie kostete ca. sechs Milliarden Dollar, bevor die erste Kopie Ende 2006 verkauft werden konnte (Quelle: *The Economist* (2007)). Diese immensen Fixkosten könnten bei Bepreisung nach Grenzkosten, die bei einem Download über das Internet im Cent-Bereich liegen würden, niemals wieder eingespielt werden. 2. Pfizer, das größte Pharmaunternehmen der Welt, gab Ende 2006 bekannt, dass es die in der Endphase steckende Entwicklung seines neuen Cholesterin-Medikaments „Torcetrapib“ nach 800 Millionen Dollar Entwicklungskosten einstellen werde, weil mehrere Testpersonen gestorben waren. Am folgenden Tag verlor das Unternehmen ein Achtel seines Wertes, insgesamt mehr als 25 Milliarden Dollar (Quelle: *The Economist* (2006)). 3. Die Entwicklung des neuen Passagierflugzeugs „A380“ hat die Firma Airbus ca. zwölf Milliarden Euro gekostet. Nach mehr als 20 Jahren Entwicklungszeit wurde das erste Exemplar im Oktober 2007 (mit einer Verspätung von über einem Jahr zum ursprünglich angekündigten Termin) ausgeliefert.

Dies macht deutlich, dass Forschung oft nicht nur hohe Fixkosten verursacht, sondern auch noch sehr riskant sein kann. Auf diesen Aspekt wird im nächsten Kapitel näher eingegangen. Forschung wird dort explizit als unsicherer Prozess modelliert.



Die am häufigsten kritisierte Implikation des Modells ist das Auftreten der Skaleneffekte. Im nächsten Kapitel wird ein Modell vorgestellt, das genau diese Effekte beseitigt.

## 2.7 Appendix: Herleitung

In diesem Abschnitt werden die Preise und nachgefragten Mengen der Kapitalgüter hergeleitet und die Gewinne der Zwischenproduzenten (vor Patentausgaben) bestimmt. Ableiten der Gewinnfunktion in (2.17) nach dem Preis und Nullsetzen ergibt

$$\frac{\partial \pi(j)}{\partial p(j)} = \left[ \frac{\alpha L_Y^{1-\alpha}}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - [p(j) - r\eta] \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{\alpha L_Y^{1-\alpha}}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \frac{\alpha L_Y^{1-\alpha}}{p(j)^2} = 0.$$

Vereinfachen und Umformen liefert den optimalen und einheitlichen Preis  $p = r\eta/\alpha$ .

Dieser Preis in die Nachfragefunktion (2.16) eingesetzt verdeutlicht, dass mit dem Preis auch die nachgefragten Mengen einheitlich sind.

Aus der Nachfragefunktion (2.16) und der Produktionsfunktion von  $Y$  können die Gewinne in (2.18) abgeleitet werden. Umformen der wegen Symmetrie vereinfachten Produktionsfunktion  $Y = L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha$ :

$$x^\alpha = \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha} A}.$$

Auflösen der Nachfragefunktion (2.16) nach dem Preis und Einsetzen der letzten Gleichung führt zu

$$p = \alpha L_Y^{1-\alpha} x^\alpha x^{-1} = \alpha \frac{Y}{A x}.$$

Zusammengenommen folgt (mit  $r\eta = \alpha p$ )

$$\pi = (1 - \alpha) p x = \alpha (1 - \alpha) \frac{Y}{A}.$$

## Kapitel 3

# Semi-endogenes Wachstum im Romer-Modell: Das Jones-Modell

Wie in Abschnitt 2.3 bereits erwähnt, lösten die drastischen Implikationen des Romer-Modells eine Reihe empirischer Untersuchungen aus, welche das Modell in seiner Grundform in Frage stellten. Eine Variante des Modells ohne die beschriebenen Skaleneffekte wurde von Jones (1995b) vorgeschlagen. Bis auf zwei Änderungen ist dieses Modell mit dem Romer-Modell identisch. Zum einen nimmt Jones ein positives Bevölkerungswachstum an:  $L(t) = L_0 e^{nt}$ . Zum anderen modifiziert er die Forschungstechnologie.

### 3.1 Beschreibung des Modells und Annahmen

Wie im Romer-Modell werden im Forschungssektor blueprints für neue Produkte mit Arbeit als einzigem physischen Faktoreinsatz hergestellt. Die Produktionsfunktion lautet aber jetzt

$$\dot{A} = \frac{L_A}{a} A^\phi, \quad a > 0, \phi < 1. \quad (3.1)$$

Bestehendes technisches Wissen kann die Produktion von neuem Wissen positiv oder negativ beeinflussen, je nachdem wie groß der Parameter  $\phi$  ist. Jones (2004) nennt die positiven Wissens-Spillover ( $\phi > 0$ ) „standing-on-shoulders“-Effekt. Frühere Erfindungen begünstigen die Forschungstätigkeit heute. Die negativen Spillover ( $\phi < 0$ ) nennt er „fishing-out“-Effekt, wenn die einfachsten Erfindungen am Anfang gemacht werden. Die Funktion weist konstante Grenzer-

träge im physischen Input auf.<sup>1</sup>

Für eine neue Erfindung wird wieder ein unendlich laufendes Patent gewährt. Die übrigen Modellannahmen von Romer bleiben unverändert.

## 3.2 Dynamisches Gleichgewicht

Für die intertemporale Nutzenfunktion aus (2.1)<sup>2</sup> liefert Nutzenmaximierung der Haushalte bei Bevölkerungswachstum die Ramsey-Regel (2.12).<sup>3</sup>

Analog zum Romer-Modell ergeben sich Preise, Mengen und Gewinne für die Zwischenprodukthersteller wieder aus Gewinnmaximierung als

$$p(j) = p = \frac{r\eta}{\alpha}, \quad x(j, t) = x(t) = \left[ \frac{\alpha^2 L_Y(t)^{1-\alpha}}{r\eta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

---

<sup>1</sup>Bei Jones (1995b) gibt es einen weiteren Effekt, den „standing-on-shoes“-Effekt. Dieser bedeutet, dass auf aggregierter Ebene die Möglichkeit besteht, dass Erfindungen gleichzeitig mehrmals gemacht werden. Die Forschungstechnologie lautet dann auf aggregierter Ebene  $\dot{A} = (L_A^\lambda A^\phi)/a$ , mit  $\lambda < 1$ . Forschungsarbeit weist abnehmenden Grenzerträge auf. Von diesem Effekt wird hier zur Vereinfachung abgesehen, weil er für das dynamische Gleichgewicht keine wesentliche Rolle spielt.

<sup>2</sup>Die Variable  $c$  muss hier den Pro-Kopf-Konsum angeben, nicht den Haushalts-Konsum. In Romer-Modell ohne Bevölkerungswachstum war diese Unterscheidung unerheblich.

<sup>3</sup>Allerdings macht es für die Ramsey-Regel einen Unterschied, ob die Summe der Pro-Kopf-Nutzen oder der Pro-Kopf-Nutzen eines Haushaltsmitglieds maximiert wird. Die Hamiltonfunktion lautet dann

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi (wL + rB - cL)$$

mit  $L$  als zeitabhängiger Variable. Aus  $\partial \mathcal{H} / \partial c = 0$  und  $\partial \mathcal{H} / \partial B = -\dot{\xi}$  folgt:

$$\xi = \frac{c^{-\sigma} e^{-\rho t}}{L}$$

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = -r.$$

Logarithmisches Differenzieren der ersten Bedingung und Gleichsetzen mit der zweiten ergibt:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho - n}{\sigma}.$$

Die Wachstumsrate des Konsums, die aus dem Haushalts-Maximierungsproblem resultiert, ist im Vergleich zu dieser um  $n/\sigma$  höher, weil bei diesem der momentane Nutzen des Haushalts mit künftigen Nutzen des Haushalts verglichen wird. Der Haushaltsnutzen steigt aber alleine schon dadurch, dass es mehr Haushaltsmitglieder gibt, auch wenn der Einzelne gar keinen höheren Nutzen hat. Bei der Pro-Kopf-Betrachtung ist dies nicht der Fall. Deshalb wird bei der Pro-Kopf-Betrachtung mehr konsumiert und weniger gespart. Die Wachstumsrate des Konsums ist damit niedriger.

$$\pi(j, t) = \pi(t) = \alpha(1 - \alpha) \frac{Y(t)}{A(t)}. \quad (3.2)$$

Mengen und Gewinne ändern sich im Zeitablauf. Die nachgefragten Mengen wachsen mit der gleichen Rate wie die Bevölkerung,  $n$ , weil im Steady state die Aufteilung der Arbeit auf Forschung und Endproduktherstellung konstant sein muss ( $\dot{L}_Y/L_Y = \dot{L}/L = n$ ) und der Zins konstant ist. Damit folgt aus der Definition des aggregierten Kapitalstocks, (2.20),

$$\frac{\dot{K}}{K} = n + \frac{\dot{A}}{A}.$$

Aus (2.21) ergibt sich  $\dot{Y}/Y = \alpha\dot{K}/K + (1 - \alpha)\dot{A}/A + (1 - \alpha)n$ . Zusammen mit der vorletzten Gleichung folgt damit

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = n + \frac{\dot{A}}{A}.$$

Deshalb wachsen auch die Gewinne in (3.2) mit der Rate  $n$ , und das Inlandsprodukt pro Kopf,  $y \equiv Y/L$ , mit der Rate des technischen Wissens,  $\dot{A}/A$ . Aus (2.22) wird klar, dass der Pro-Kopf-Konsum und das Inlandsprodukt pro Kopf mit der gleichen Rate wachsen müssen, weil der aggregierte Kapitalstock und das gesamte Inlandsprodukt mit gleicher Rate wachsen. Zusammen folgt:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{A}}{A}.$$

Die Steady-state-Wachstumsrate des technischen Wissens erhält man direkt aus Gleichung (3.1). Logarithmisches Differenzieren von  $\dot{A}/A = (1/a)L_A A^{\phi-1}$ , gleich null Setzen, weil im Steady state die Wachstumsrate konstant ist, ergibt

$$\frac{\dot{L}_A}{L_A} = (1 - \phi) \frac{\dot{A}}{A}.$$

Im Steady state ist der Anteil der Arbeit, der in Forschung eingesetzt wird, an der gesamten Arbeitsmenge konstant.  $L_A$  und  $L$  wachsen mit der gleichen Rate:  $\dot{L}_A/L_A = \dot{L}/L = n$ . Auflösen nach  $\dot{A}/A \equiv g$  führt schließlich zu

$$g \equiv \frac{n}{1 - \phi}. \quad (3.3)$$

Schließlich bleibt noch die Allokation der Arbeit zu bestimmen. Weil die Gewinne mit Rate  $n$  wachsen, ergibt sich aus der Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt (2.5), dass auch der Preis für die Patente,  $P_A$ , mit dieser Rate wachsen müssen. Es folgt  $P_A = \pi/(r - n)$ .

Aus Gewinnmaximierung der F&E-Firmen,  $\max_{L_A} \dot{A}P_A - wL_A$ , folgt

$$w = \frac{1}{a} A^\phi P_A.$$

Im Endproduktsektor und in F&E müssen im Gleichgewicht die gleichen Löhne gezahlt werden. Gleichsetzen der letzten Gleichung mit (2.14):

$$(1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y} = \frac{1}{a} A^\phi P_A.$$

Einsetzen von  $P_A = \pi/(r - n)$ , der unteren Gleichung aus (3.2) und der Ramsey-Regel liefert

$$\frac{L_A}{L - L_A} = \frac{L_A}{L_Y} = \frac{\alpha g}{\sigma g + \rho - n}. \quad (3.4)$$

In Gleichung (3.3) wird die Wachstumsrate der Ökonomie durch exogen gegebene Parameter bereits festgelegt. Sie hängt also nur von exogenen Größen ab, die vom Modell nicht erklärt werden. Für diese Wachstumsrate legt dann die letzte Gleichung den benötigten Arbeitseinsatz in Forschung fest. Dieser steigt, je höher die Wachstumsrate ist ( $\partial L_A / \partial g > 0$ ). Die Kausalität läuft aber nicht in die andere Richtung: Ein höherer Arbeitsanteil in Forschung, beispielsweise wegen einer Forschungssubvention, erhöht die langfristige Wachstumsrate nicht!<sup>4</sup> Wachstum wird deshalb in dieser Art von Modellen als „semi-endogen“ bezeichnet bzw. die Modelle als „non-scale models“. Der Grund für Wirtschaftswachstum ist technischer Fortschritt und dieser wird endogen, d.h. durch gezielte Forschung gewinnorientierter Unternehmen, erzeugt. Die sich einstellende Wachstumsrate ist hingegen nur von exogenen Faktoren bestimmt. Sie ist nur von der Bevölkerungswachstumsrate und von Parametern der Forschungstechnologie abhängig.

Im Romer-Modell ist es hingegen für eine Regierung ein Leichtes, die langfristige Wachstumsrate zu beeinflussen.<sup>5</sup> Die Ursache für den gravierenden Unterschied dieser beiden fast identischen Modelle ist die Produktionsfunktion für neues technisches Wissen. Die Variante im Romer-Modell kann als Spezialfall der

---

<sup>4</sup>Es gibt aber einen zeitlich begrenzten, positiven Effekt auf  $g$  im Übergang in den neuen Steady state.

<sup>5</sup>Die Wachstumsrate des technischen Wissens,  $g_A$ , ist abhängig von der eingesetzten Arbeit in Forschung,  $L_A$ :  $g_A = L_A/a$ . Durch eine einfache Forschungssubvention kann eine Regierung diesen Anteil erhöhen und damit die Wachstumsraten  $g_A$  und  $g_Y$  steigern (siehe Arnold (1997, Abschnitt 9.5)).

Jones-Darstellung mit  $\phi = 1$  (und  $n = 0$ ) gesehen werden. Dass bestehendes Wissen linear in die Produktionsfunktion eingeht (d.h.  $\phi = 1$ ), ist im Romer-Modell für langfristiges Wachstum entscheidend, erscheint aber wegen der oben gemachten Argumente (insb. der Möglichkeit des „fishing-out“) als ziemlich willkürlich. Zusammen mit den empirischen Untersuchungen spricht also einiges dafür, das Modell von Jones in dieser Hinsicht als das „realistischere“ von beiden zu sehen.<sup>6</sup> Auf fragwürdige Implikationen des Jones-Modells wird weiter unten eingegangen.

Auch auf die Wohlfahrtseigenschaften haben die zwei Änderungen des Jones-Modells Auswirkungen.

### 3.3 Wohlfahrt

Zur Wohlfahrtsanalyse wird wieder ein wohlwollender sozialer Planer unterstellt, der die Ressourcen der Ökonomie bestmöglich aufteilt. Eine erste wichtige Beobachtung ist, dass die langfristige Wachstumsrate des technischen Wissens in der Ökonomie auch für den sozialen Planer exogen ist, und durch Gleichung (3.3) gegeben ist. Die Hamiltonfunktion lautet (analog zu Gleichung (2.28))<sup>7</sup>

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} L \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi_1 [BK^\alpha A^{1-\alpha} (L - L_A)^{1-\alpha} - cL] + \xi_2 \frac{L_A}{a} A^\phi. \quad (3.5)$$

Aus  $\partial \mathcal{H} / \partial c = 0$ ,  $\partial \mathcal{H} / \partial L_A = 0$ ,  $\partial \mathcal{H} / \partial K = -\dot{\xi}_1$  und  $\partial \mathcal{H} / \partial A = -\dot{\xi}_2$  folgt nun

$$\xi_1 = e^{-\rho t} c^{-\sigma} \quad (3.6)$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{A(L - L_A)}{(1 - \alpha)Y L_A} \frac{\dot{A}}{A} \quad (3.7)$$

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = -\alpha \frac{Y}{K} \quad (3.8)$$

$$\frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} = -\frac{\xi_1}{\xi_2} (1 - \alpha) \frac{Y}{A} - \phi \frac{\dot{A}}{A}. \quad (3.9)$$

---

<sup>6</sup>Allerdings wird in Linsens (2005) gezeigt, dass bei komparativ statischen Untersuchungen sich die Wachstumsrate bei der Anpassung an den neuen Steady state im Jones-Modell durch die neue Wachstumsrate im Romer-Modell für mehrere Jahrzehnte gut approximieren lässt.

<sup>7</sup> $L$  und  $L_A$  sind jetzt zeitabhängig.

Aus (3.8) folgt wieder  $\dot{Y}/Y = \dot{K}/K$ . Logarithmisches Differenzieren von (2.21) ergibt damit  $\dot{Y}/Y = \dot{A}/A + n$ . Schließlich erhält man aus (2.22):  $\dot{Y}/Y = \dot{c}/c + n$ . Zusammen genommen ergibt sich

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{c}}{c} + n = \frac{\dot{A}}{A} + n$$

bzw.

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{n}{1-\phi} \equiv g, \quad (3.10)$$

mit  $k \equiv K/L$  und  $y \equiv Y/L$  als Pro-Kopf Größen.

Zwar können Wohlfahrtsgewinne nicht aufgrund einer Erhöhung der Wachstumsrate des Inlandsproduktes auftreten, weil diese ja exogen ist. Aber das Niveau des Inlandsproduktes kann sich ändern und damit Wohlfahrtseffekte haben. Liegen beispielsweise positive Wissens-Spillover vor ( $\phi > 0$ ), dann würde ein sozialer Planer – im Gegensatz zu Akteuren in der dezentralen Marktlösung – diese berücksichtigen, und würde mehr Arbeit in F&E einsetzen. Durch die höhere Beschäftigung in Forschung würde zwar die langfristige Wachstumsrate nicht steigen, aber im Vergleich zur dezentralen Allokation wäre die Anzahl an Varietäten,  $A$ , dauerhaft auf einem höheren Niveau. Der Zuwachs an Produktivität (TFP) würde den Output, den Konsum und damit den Nutzen der Haushalte erhöhen. Es gibt für den sozialen Planer (bzw. die Regierung) also noch beträchtlichen Spielraum, die Wohlfahrt zu steigern, obwohl die Wachstumsrate festgelegt ist.

Einsetzen von (3.7) in (3.9) ergibt mit  $L_Y = L - L_A$

$$\frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} = -g \left( \frac{L_Y}{L_A} + \phi \right).$$

Damit folgt aus (3.7)<sup>8</sup>

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = -n - g \left( \frac{L_Y}{L_A} + \phi \right).$$

Gleichung (3.6) nach der Zeit Ableiten ergibt mit (3.10)

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = -\rho - \sigma g.$$

---

<sup>8</sup>Gleichung (3.7) impliziert

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2} = -n + \frac{\dot{\xi}_2}{\xi_2}.$$



Gleichsetzen der letzten beiden Gleichungen und Auflösen nach  $L_A/L_Y$  liefert schließlich

$$\frac{L_A}{L_Y} = \frac{g}{\sigma g + \rho - n - \phi g}, \quad (3.11)$$

wobei  $g$  durch (3.3) gegeben ist.

Die Wachstumsrate des Outputs und des Konsums sind also in der dezentralen Ökonomie und in der des sozialen Planers identisch. Aber die Aufteilung der Arbeit auf die zwei Verwendungsmöglichkeiten unterscheidet sich, wie ein Vergleich von (3.4) mit der letzten Gleichung zeigt. In dieser verdeutlichen sich zwei internalisierte Effekte. Zum einen bewirkt  $\alpha$ , das den Aufschlag auf die Grenzkosten der Kapitalgüter festlegt, in Gleichung (3.4), dass in der dezentralen Ökonomie zu wenig Arbeit in F&E eingesetzt wird. Zum anderen spiegelt  $\phi$  die Präsenz der Wissens-Spillover im Kalkül des zentralen Planers wider. Je nachdem, ob „fishing-out“ oder „standing on shoulders“ vorliegt, können diese positiv oder negativ sein und den Forschungsanteil erhöhen oder senken.

### 3.4 Stabilität

Die Stabilitätseigenschaften sind wieder dem Romer-Modell ähnlich. Allerdings gibt es durch die wachsende Bevölkerung eine zusätzliche, dynamische Variable. In Arnold (2006) wird gezeigt, dass es mit der gleichen Vereinfachung wie hier ( $\lambda = 1$ ) für ein Marktgleichgewicht einen eindeutigen Pfad gibt, der in den Steady state führt. Ähnlich wie im Stabilitätsbeweis des Romer-Modells reduziert Arnold das System, durch die wachsende Bevölkerung aber auf vier autonome Differentialgleichungen. Er zeigt, dass das linearisierte System zwei negative Eigenwerte hat. Eine stabile, zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit führt, ausgehend von gegebenen Startwerten, in den Steady state.

### 3.5 Empirische Implikationen

Die wichtigste Eigenschaft des Modells ist, dass es für eine Regierung nicht mehr möglich ist, die langfristige Wachstumsrate zu beeinflussen, wie es im Romer-Modell auf äußerst einfache Weise der Fall ist. Die Wachstumsrate ist von der Bevölkerungswachstumsrate,  $n$ , abhängig. Allerdings ergibt sich hieraus eine andere unschöne Implikation. Länder wie Deutschland oder Japan ohne wachsende Bevölkerung sollten nach diesem Modell auch kein Output-Wachstum mehr

aufweisen! Deshalb schlägt Jones selbst vor, dass das geeignete Maß nicht die Bevölkerungswachstumsrate in einem Land ist, sondern diejenige der technologisch führenden Nationen insgesamt. Das Modell sollte auch nur für diese Länder angewendet werden. Es macht Aussagen über Wachstum durch neues technisches Wissen, nicht über Wachstum, welches durch Adaption vorhandenen Wissens generiert wird, wie es für Entwicklungs- und Schwellenländer relevant ist. Auch für Wachstumsvergleiche unter den technologisch führenden Nationen ist das Modell nicht geeignet.

Ein anderer Ausweg wird von Eicher (1996) und Arnold (1998, 2002) vorgeschlagen. Wird  $L$  nicht als Bevölkerungsgröße, sondern als Bestand an Humankapital gesehen, dann können Länder mit konstanter Bevölkerungsgröße trotzdem wachsen, wenn sie Humankapital akkumulieren.<sup>9</sup>

Eine interessante Anwendung einer Variante des Modells wird für die USA in (Jones 2002b) gemacht. Jones argumentiert, dass die USA wegen eines kontinuierlichen Anstiegs der Forschungsintensität<sup>10</sup> nicht auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad sein können. Die beobachtbaren hohen Wachstumsraten der Vergangenheit sind damit v.a. der Zunahme dieser Inputs geschuldet und damit Übergangsdynamik und können langfristig nicht aufrecht erhalten werden. Er berechnet anhand einer Modifikation des hier vorgestellten Modells die Steady-state-BIP-Wachstumsrate für die USA und vergleicht sie mit der tatsächlich beobachteten. Die Differenz stellt dann die temporäre Übergangsdynamik dar.

Für  $n$  wird mit 1,2% die Wachstumsrate des Arbeitskräftepotentials der G5-Staaten (Frankreich, Deutschland (West), Japan, Großbritannien, USA) genommen. Der Ausdruck  $\lambda/(1 - \phi)$  in der Wachstumsrate des technischen Wissens,  $A$ ,<sup>11</sup> wird ökonometrisch geschätzt und liegt zwischen 0,05 und 0,33. Damit ergibt sich eine Steady-state-Wachstumsrate, die zwischen 0,06% und 0,4% liegt. Weil die tatsächliche durchschnittliche Wachstumsrate bei ungefähr 2% liegt, müssen demnach mindestens 80% der beobachteten Wachstumsraten das starke Inputwachstum als Grund haben. Dies kann langfristig natürlich nicht aufrecht erhalten werden. Jones schließt daraus, dass sich langfristig das Wachstum für die US-Ökonomie drastisch reduzieren wird.<sup>12</sup>

<sup>9</sup>Für einen kurzen Überblick siehe Stadler (2004).

<sup>10</sup>Bspw. hat sich der Anteil an Wissenschaftlern und Forschern, die in F&E eingesetzt werden, in den USA zwischen 1940 und 1993 verdreifacht. Auch der Anteil der Erwachsenen mit höheren Abschlüssen („High school“ und „college“) ist in diesem Zeitraum signifikant gestiegen.

<sup>11</sup>In Gleichung (3.3) wurde zur Vereinfachung  $\lambda = 1$  gesetzt.

<sup>12</sup>Kurz vor der Asienkrise prognostizierte Young (1995) in einer ähnlichen „Growth-

---

Accounting“-Studie eine signifikante Verlangsamung des Wachstums für einige Länder Süd-Ost-Asiens, weil Inputwachstum die Hauptursache für deren hohe Wachstumsraten waren und nicht eine höhere Effizienz in der Nutzung dieser Inputs. Das Produktivitätswachstum – die Ursache für langfristiges Wachstum – war nur gering. Mittlerweile haben sich diese Länder aber wieder recht gut erholt. Die durchschnittlichen jährlichen Wachstumsraten seit 1998 betragen: in Thailand 4,9%, in Taiwan 3,8%, in Südkorea 5,6%, in Hongkong 4,3% und in Singapur 5,7% (Quelle: Datastream).



# Kapitel 4

## Das Grossman-Helpman-Modell I: Produktvielfalt

Ein weiteres sehr wichtiges endogenes Wachstumsmodell stammt von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 3). Es ist dem Romer-Modell sehr ähnlich und kann als Vereinfachung dessen verstanden werden. Es wird deshalb oft als Grundlage verwendet, wenn z.B. die Auswirkungen von Außenhandel, der Finanzstruktur oder der Einkommensverteilung auf die Ökonomie mittels endogener Wachstumsmodelle untersucht werden soll.

### 4.1 Beschreibung des Modells und Annahmen

Gegenüber dem Romer-Modell werden zwei Änderungen gemacht. Zum einen gibt es kein Kapital, zum anderen ist die Verwendung des Faktors Arbeit anders. Zwar wird wieder ein Teil,  $L_A$ , in Forschung eingesetzt, weil es aber kein Kapital gibt werden die Zwischenprodukte nun auch aus Arbeit,  $L_x$ , hergestellt. Dafür wird zur Vereinfachung unterstellt, dass in der Endproduktherstellung keine Arbeit eingesetzt wird. Die Zwischenprodukte werden ohne weiteren Faktoreinsatz nur „zusammengesetzt“ und bilden das homogene Endprodukt

$$Y = \left[ \int_0^{A(t)} x(j)^\alpha dj \right]^{\frac{1}{\alpha}} = D_Y^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (4.1)$$

wobei in der rechten Gleichung  $D_Y \equiv \int_0^{A(t)} x(j)^\alpha dj$  definiert wurde.

Weil es kein Kapital im Modell gibt, wird die gesamte Endproduktherstellung konsumiert:  $Y = cL$ . Die intertemporale Nutzenfunktion der Haushalte ist durch

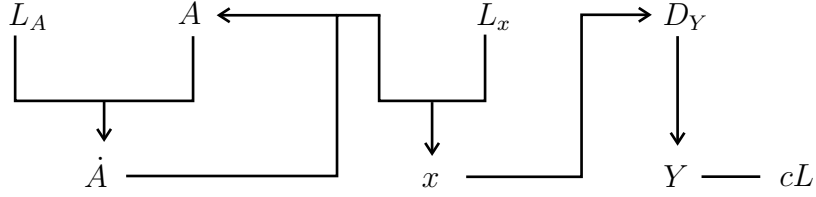


Abbildung 4.1: Die Struktur des Grossman-Helpman-Modells

(2.1), die Ramsey-Regel damit durch (2.12) gegeben. Die Struktur des Modells wird in Abbildung 4.1 dargestellt.

Im Forschungssektor werden wieder „Bauanleitungen“ für neue Zwischenprodukte mit der Technologie aus (2.3) hergestellt. Der Wert eines Patents wird über (2.4) bestimmt.

## 4.2 Dynamisches Gleichgewicht

Die Quelle langfristigen Wachstums ist auch in diesem Modell wieder neues technisches Wissen. Weil die gleiche Forschungstechnologie wie im Romer-Modell unterstellt wird, ist auch hier wieder der Arbeitseinsatz in F&E entscheidend und es liegen Skaleneffekte vor. Im Gleichgewicht müssen die gleichen Löhne in Forschung und Zwischenprodukttherstellung gezahlt werden. Die Löhne in Forschung sind durch Bedingung (2.13) gegeben.<sup>1</sup> Damit bleibt die entsprechende Bedingung für den Zwischenproduktsektor zu bestimmen.

Die kompetitiven Firmen im Endproduktsektor maximieren ihre Gewinne über den Einsatz von Zwischenprodukten:

$$\max_{x(j)} p_Y \left[ \int_0^{A(t)} x(j)^\alpha dj \right]^{\frac{1}{\alpha}} - \int_0^A p(j) x(j) dj.$$

Mit  $Y$  als Numeraire ist die (inverse) Nachfrage nach Gut  $j$

$$p(j) = \frac{D_Y^{\frac{1}{\alpha}-1}}{x(j)^{1-\alpha}}. \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Es wird wieder  $L_A > 0$  unterstellt.

Gegen diese Nachfrage<sup>2</sup> maximieren die Zwischengutproduzenten ihre Gewinne:  $\max_{x(j)} [p(j)x(j) - wL_x(j)]$ . Weil eine Einheit des Zwischengutes dabei aus einer Einheit Arbeit hergestellt wird und unter Verwendung von (4.2) folgt

$$\max_{x(j)} D_Y^{\frac{1}{\alpha}-1} x(j)^\alpha - wx(j).$$

Der resultierende Preis für Zwischengüter ist ein Aufschlag auf die Grenzkosten (hier  $w$ ) und ist wieder für alle Varietäten gleich:

$$p(j) \equiv p = \frac{w}{\alpha}. \quad (4.3)$$

Damit folgt, dass auch die nachgefragten Mengen aus (4.2) gleich sind:  $x(j) \equiv x$ . Die Produktionsfunktion aus (4.1) vereinfacht sich damit zu

$$Y = A^{\frac{1}{\alpha}} x. \quad (4.4)$$

Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt bedeutet, dass die eingesetzte Arbeit in F&E und die in der Zwischenproduktherstellung das Angebot voll ausschöpfen:

$$L = L_A + L_x. \quad (4.5)$$

Wegen der Konstanz der Bevölkerung müssen in einem Steady state die Arbeitsanteile gleich bleiben. Weil aus einer Einheit Arbeit genau eine Einheit eines Zwischenproduktes hergestellt wird, kann  $L_x (\equiv \int_0^A L(j) dj)$  auch als

$$L_x = Ax \quad (4.6)$$

angegeben werden. Damit folgt  $\dot{A}/A = -\dot{x}/x$ . Die nachgefragte Menge jedes Zwischengutes fällt mit der Rate, mit der neue Varietäten erfunden werden. Mit (4.4) ergibt sich

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\dot{A}}{A}. \quad (4.7)$$

Nullgewinne im Endproduktsektor implizieren  $\int_0^A p(j)x(j) = Ap x = Y$ . Der Faktoreinsatz schöpft den Produktionswert von  $Y$  komplett aus. Die letzte Gleichung und (4.3) führen zu

$$w = \frac{\alpha Y}{Ax}.$$

---

<sup>2</sup>Wie im Romer-Modell sind auch hier die Substitutionselastizität zwischen zwei Gütern und die Preiselastizität der Nachfrage eines jeden Gutes gleich hoch und betragen  $-1/(1-\alpha)$ .

Gleichsetzen mit (2.13) liefert die Bedingung, dass die Löhne in beiden Sektoren gleich sind:

$$\frac{AP_A}{a} = \frac{\alpha Y}{Ax}.$$

Unter Verwendung von (4.6) folgt damit

$$L_x = \frac{a\alpha Y}{AP_A}. \quad (4.8)$$

Aus  $Ap_x = Y$  und (4.4) ergibt sich ein weiterer Ausdruck für den Preis:  $p = A^{\frac{1}{\alpha}-1}$ . Dieser ergibt zusammen mit (4.4) für die Gewinne der ZwischenproduktHersteller<sup>3</sup>

$$\pi = \frac{(1-\alpha)Y}{A}. \quad (4.9)$$

Im Steady state gilt deshalb  $\dot{\pi}/\pi = \dot{Y}/Y - \dot{A}/A$  und mit (4.7)

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi} = \frac{\dot{P}_A}{P_A} = \frac{1-2\alpha}{\alpha} \frac{\dot{A}}{A}. \quad (4.10)$$

Die linke Gleichung folgt aus der Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt (2.5). Aus dieser ergibt sich dann auch ein Ausdruck für den Patentwert im Steady state:

$$P_A = \frac{\pi}{r - \frac{1-2\alpha}{\alpha} \frac{\dot{A}}{A}}. \quad (4.11)$$

Wegen (4.7) und  $\dot{c}/c = \dot{Y}/Y$  ergibt die Ramsey-Regel (2.12) nach  $r$  aufgelöst

$$r = \frac{(1-\alpha)\sigma}{\alpha} \frac{\dot{A}}{A} + \rho. \quad (4.12)$$

Diese letzte Gleichung und Gleichungen (4.9) und (4.11) in (4.8) eingesetzt, ergibt eine Gleichung in  $L_x$  und  $\dot{A}/A$ :

$$L_x = \frac{a\alpha\rho + a[(1-\alpha)\sigma - (1-2\alpha)]\frac{\dot{A}}{A}}{1-\alpha}. \quad (4.13)$$

Eine zweite folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Arbeitsmarkt und der Forschungstechnologie:

---

<sup>3</sup>Die Preise und Mengen sind wieder einheitlich, damit auch die Gewinne:  $\pi = (p-w)x = (1-\alpha)px$ . Im letzten Übergang wurde Gleichung (4.3) verwendet.



$$L_x = L - a \frac{\dot{A}}{A}. \quad (4.14)$$

Für den Fall, dass F&E betrieben wird ( $L_A > 0$  und  $P_A \dot{A} = wL_A$ ), legen diese zwei Gleichungen schließlich die Steady-state-Wachstumsrate fest:<sup>4</sup>

$$g \equiv \frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{(1-\alpha)\sigma + \alpha} \left[ \frac{(1-\alpha)L}{a} - \alpha\rho \right]. \quad (4.15)$$

Diese Wachstumsrate ist der aus dem Romer-Modell – Gleichung (2.26) – sehr ähnlich. Das Modell weist wieder Skaleneffekte auf: Eine größere Bevölkerung,  $L$ , geringere Diskontierung künftigen Konsums (ein kleineres  $\rho$ ), eine größere intertemporale Substitutionselastizität (ein kleineres  $\sigma$ ) und eine höhere Produktivität der Forscher,  $1/a$ , erhöhen wieder die langfristige Wachstumsrate! Die Jones-Kritik trifft auch auf dieses Modell zu.

Die Nutzenfunktion ist im ursprünglichen Modell von Grossman und Helpman ein Spezialfall der hier gewählten (mit  $\sigma = 1$ ). Das bedeutet, dass die Nutzenfunktion logarithmisch ist. Wegen der allgemeineren Form der Nutzenfunktion hier legt die Transversalitätsbedingung,  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) \xi(t) = 0$ , noch eine Einschränkung für die zulässigen Parameterbereiche auf. Aus ihr folgt  $\dot{\xi}(t)/\xi(t) + \dot{B}(t)/B(t) < 0$ . Der Wertpapierbestand der Haushalte,  $B(t)$ , besteht aus den gehaltenen Patenten,  $P_A(t) A(t)$ . Zusammen mit (2.10) folgt  $r - \dot{P}_A/P_A - \dot{A}/A > 0$ . Mit der Ramsey-Regel, (2.12), und dem Ausdruck für die Entwicklung der Patentwerte im Steady state, (4.10), ergibt sich

$$\rho > \frac{1-\alpha}{\alpha} (1-\sigma)g. \quad (4.16)$$

Die gleichgewichtige Wachstumsrate aus (4.15) eingesetzt, liefert dann folgende Restriktion:

$$\rho > \frac{(1-\alpha)^2(1-\sigma)L}{\alpha a}. \quad (4.17)$$

Für  $\sigma \geq 1$  ist diese Restriktion immer erfüllt, weil für  $\rho$ ,  $L$  und  $a$  nur positive Werte zugelassen sind und  $\alpha$  zwischen null und eins liegt.

---

<sup>4</sup>Bei  $P_A \dot{A} < wL_A$  ist  $L_A = 0$  und damit auch die Wachstumsrate  $g$ .

### 4.3 Stabilität

Im Romer- und im Jones-Modell gibt es physisches Kapital. Weil dessen Anfangsbestand in der Regel nicht mit dem Steady-state-Niveau übereinstimmt und die Anpassung an dieses Niveau eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt, gibt es in diesen Modellen eine Anpassungsdynamik an den Steady state. Im Modell hier fehlt physisches Kapital. Es ist deshalb relativ einfach zu zeigen, dass der Steady state unverzüglich erreicht wird.

Definiere dazu  $\kappa \equiv Y/(AP_A)$  als Verhältnis von Output zum Wert aller Patente. Im Steady state ist  $\kappa$  konstant.<sup>5</sup> Aus (4.8) und (4.14) und weil der Arbeitseinsatz in Forschung nicht negativ sein kann,  $L_A \geq 0$ , ergibt sich

$$g = \max \left\{ 0; \frac{L}{a} - \alpha\kappa \right\}. \quad (4.18)$$

Diese Gleichung stellt die Ressourcenbeschränkung für die Ökonomie dar und wird durch die fallende, geknickte und dickere Kurve in Abbildung 4.2 dargestellt. Eine Differentialgleichung in  $\kappa$  erhält man folgendermaßen: Die Ramsey-Regel (2.12) und der Ausdruck für die Gewinne (4.9) in die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt (2.5) eingesetzt, ergibt einen Ausdruck für die Entwicklung der Patentwerte:

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = \sigma \frac{\dot{Y}}{Y} - (1 - \alpha)\kappa + \rho. \quad (4.19)$$

Indem (2.13) durch  $Y$  geteilt und umgestellt wird, folgt  $\kappa = Y/aw$  und damit  $\dot{Y}/Y = \dot{\kappa}/\kappa + \dot{w}/w$ . Mit  $\dot{w}/w = \dot{p}/p$  (aus (4.3)) und  $\dot{p}/p = (1 - \alpha)g/\alpha$  (wegen  $p = A^{1/\alpha-1}$ ) ergibt sich

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}g + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa}. \quad (4.20)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks und von Gleichung (4.19) in  $\dot{\kappa}/\kappa = \dot{Y}/Y - \dot{P}_A/P_A - g$  führt zu

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{1 - \alpha}{\sigma} \kappa + \left[ \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \sigma) - 1 \right] \frac{g}{\sigma} - \frac{\rho}{\sigma}. \quad (4.21)$$

---

<sup>5</sup>Logarithmisches Differenzieren führt mit (4.7) und (4.10) zu

$$g_\kappa = g_Y - (g_A + g_{P_A}) = \frac{1 - \alpha}{\alpha} g_A - \left( g_A + \frac{1 - 2\alpha}{\alpha} g_A \right) = 0.$$

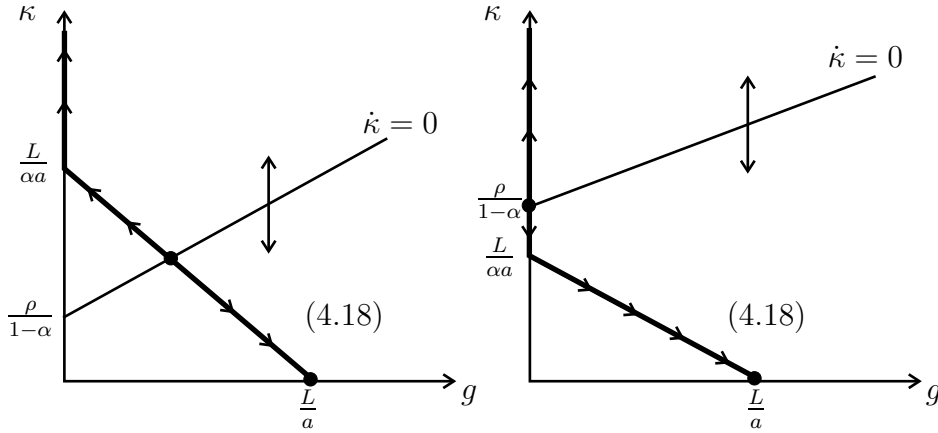


Abbildung 4.2: Stabilität im Grossman-Helpman-Modell

Für alle  $\kappa$ , die die Gleichung

$$\kappa = \frac{\rho}{1-\alpha} - \left( \frac{1-\sigma}{\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) g$$

erfüllen, ist  $\kappa$  konstant. Dass diese Gerade ansteigend verläuft wie in Abbildung 4.2 wird folgendermaßen ersichtlich. Angenommen, sie würde fallen. Dann würde im Schnittpunkt mit der Abszisse ( $\kappa = 0$ ) folgen:  $\rho = [(1-\sigma)(1-\alpha)/\alpha - 1]g$ . Dies widerspricht aber der Beschränkung (4.16) aus der Transversalitätsbedingung. Damit ist ein Fallen der Geraden nicht möglich.

Je nach Parameterkonstellation schneiden sich die beiden Geraden im ersten Quadranten (linke Grafik) oder auf der Ordinate (rechte Grafik). Die Schnittpunkte stellen jeweils das dynamische Gleichgewicht dar. Ein Gleichgewichtspunkt oberhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Linie und auf der Ressourcenbeschränkungskurve ist nicht möglich. Die Wachstumsrate würde gegen null gehen und  $\kappa$  gegen unendlich. Wegen  $g = 0$  wäre  $A$  und damit auch  $Y$  konstant. Damit  $\kappa$  gegen unendlich gehen kann, müsste also  $P_A$  gegen null gehen. Weil aber eine positive Nachfrage nach den vorhandenen Varietäten herrscht und Zwischenprodukthersteller positive Gewinne machen (siehe Gleichung (4.9) für  $Y$  und  $A$  konstant), werden die Patente nicht wertlos. Punkte oberhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Linie können damit wegen rationaler Erwartungen ausgeschlossen werden.

Das Gleiche gilt für Punkte unterhalb dieser Linie. Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Aus (4.9) ergibt sich  $\dot{\pi}/\pi = \dot{Y}/Y - \dot{A}/A$ . Die Gewinne folgen dem zeitlichen Pfad

$$\pi(\tau) = \pi(t) e^{\int_t^\tau \left[ \frac{\dot{Y}(s)}{Y(s)} - \frac{\dot{A}(s)}{A(s)} \right] ds}.$$

Der Ausdruck für die Patentwerte kann als

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) d\tau = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau \left[ r(s) + \frac{\dot{A}(s)}{A(s)} - \frac{\dot{Y}(s)}{Y(s)} \right] ds} \pi(t) d\tau$$

geschrieben werden. Wegen (4.9) ergibt sich

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{P_A(t)A(t)}{Y(t)} = (1 - \alpha) \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau \left[ r(s) + \frac{\dot{A}(s)}{A(s)} - \frac{\dot{Y}(s)}{Y(s)} \right] ds} d\tau.$$

Nun kann gezeigt werden (s.u.), dass die Parameterbeschränkung aus der Transversalitätsbedingung, (4.17), impliziert, dass das Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung konvergiert. Weil dann  $1/\kappa$  einen endlichen Wert annimmt, kann  $\kappa$  nicht gegen null gehen. Damit sind also Bereiche unterhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Geraden auch ausgeschlossen. Verbleibt die letzte Behauptung noch zu beweisen. Damit das Integral konvergiert, muss

$$r(t) + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} > 0$$

gelten. Unterhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Linie würden  $\kappa$  gegen null und  $g$  gegen  $L/a$  auf der Ressourcenbeschränkungs-Geraden (asymptotisch) konvergieren. Die Ramsey-Regel, Gleichung (4.20) und Gleichung (4.21) mit  $\kappa = 0$  eingesetzt, ergeben für  $g = L/a$

$$\rho > \left[ \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \sigma) - 1 \right] \frac{L}{a}.$$

Diese Bedingung wird von Bedingung (4.17) impliziert. Der Ausdruck

$$\frac{(1 - \alpha)^2 (1 - \sigma) L}{\alpha a} > \left[ \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \sigma) - 1 \right] \frac{L}{a}$$

lässt sich umformen zu

$$\frac{1}{1 - \alpha} > 1 - \sigma.$$

Wegen  $\sigma > 0$  und  $0 < \alpha < 1$  ist die linke Seite immer größer als eins, die rechte Seite immer kleiner eins. Die Bedingung ist immer erfüllt.  $\kappa$  kann also nicht gegen null konvergieren, und Punkte unterhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Geraden sind nicht möglich.

Damit können Punkte oberhalb und unterhalb des Schnittpunktes beider Linien ausgeschlossen werden. Die Ökonomie springt ohne Anpassungsdynamik in den Steady state.

## 4.4 Wohlfahrt

Wie im Romer- und im Jones-Modell liegen auch hier wieder externe Effekte vor, die ein sozialer Planer bei der optimalen Ressourcenallokation berücksichtigen würde. Weil es kein Kapital gibt, muss dieser nur die Arbeit bestmöglich aufteilen. Bei statischer Betrachtung würde er bei einer gegebenen Anzahl an Varietäten,  $A_0$ , sämtliche Arbeit in der Zwischengutherstellung einsetzen und damit die Konsummenge von  $Y$  maximieren. Aus dynamischer Sicht kann aber das Produktionspotential erhöht werden, wenn ein Teil der Arbeit zur Erfindung neuer Produkte verwendet wird. Diesen trade-off zwischen Konsumverzicht heute und zusätzlichem künftigen Konsum muss er optimal über die Wahl von  $L_A$  (und damit  $L_x$ ) lösen. Für  $c = Y/L$  in der Zielfunktion kann mit (4.4) - (4.6) geschrieben werden:

$$c = A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(1 - \frac{L_A}{L}\right).$$

Mit der Nebenbedingung  $\dot{A} = AL_A/a$  lautet die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-\rho t} \left[ A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(1 - \frac{L_A}{L}\right) \right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi A \frac{L_A}{a}.$$

Aus  $\partial \mathcal{H} / \partial L_A = 0$  und  $\partial \mathcal{H} / \partial A = -\dot{\xi}$  folgt

$$\xi = a e^{-\rho t} \left[ A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(1 - \frac{L_A}{L}\right) \right]^{-\sigma} \frac{A^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}}{L}$$

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = -\frac{L_A}{a} - \frac{1-\alpha}{\alpha a} (L - L_A).$$

Die vorletzte Gleichung logarithmisch differenziert, gleichgesetzt mit der letzten Gleichung und  $L_A/a$  durch  $g$  ersetzt, ergibt dann die Wachstumsrate des technischen Wissens,  $g$ , im sozialen Optimum:

$$g = \frac{1}{(1-\alpha)\sigma} \left[ \frac{(1-\alpha)L}{a} - \alpha\rho \right]. \quad (4.22)$$

Ein Vergleich dieser mit der Wachstumsrate von  $A$  im dezentralen Marktgleichgewicht, Gleichung (4.15), zeigt, dass letztere wieder zu niedrig ist, weil die gleichen externen Effekte wirken wie im Romer-Modell.

Allerdings zeigt Benassy (1998), dass dies kein generelles Resultat von Varietätenmodellen ist, sondern nur aus einer speziellen Parameterwahl folgt. Für das ursprüngliche Modell gilt im symmetrischen Gleichgewicht

$$Y = A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} L_x.$$

Der Parameter  $\alpha$  legt damit sowohl das Ausmaß der Spezialisierungsvorteile für die Endproduktherstellung, als auch die Marktmacht der Monopolisten und damit den Preisaufschlag fest (siehe Gleichung (4.3)). Dies ist aber nur eine Vereinfachung hier und inhaltlich nicht erforderlich. Benassy (1998) schlägt deshalb eine allgemeinere Form der Produktionsfunktion vor, in der beide Effekte getrennt werden:

$$Y = A^{\varrho+1-\frac{1}{\alpha}} \left[ \int_0^A x(j)^\alpha dj \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Im symmetrischen Gleichgewicht folgt für diese  $Y = A^\varrho L_x$ . Die Spezialisierungsvorteile, ausgedrückt durch  $\varrho$ , sind damit unabhängig von  $\alpha$ , welches nur noch den Preisaufschlag festlegt. Für das Marktgleichgewicht ist  $\alpha$  aber weiterhin wichtig. Im sozialen Optimum spielen Preise keine Rolle, weshalb auch die Wachstumsrate nicht abhängig von  $\alpha$  ist. Deshalb kann es in dieser Variante des Grossman-Helpman-Modells übermäßige Forschung geben, je nachdem, welchen Wert  $\varrho$  annimmt. Ähnliche Modifikationen können auch für andere Varietätenmodelle – wie das Romer-Modell aus Abschnitt 2 oder das Jones-Modell aus Abschnitt 3 – gemacht werden. Auch in diesen kann dann zu viel Forschung betrieben werden.

## Teil III

# Modelle mit Wachstum durch Qualitätsverbesserungen





# Kapitel 5

## Das Grossman-Helpman-Modell II: Produktqualität

Im letzten Kapitel wurde ein Modell von Grossman und Helpman vorgestellt, in dem die Produktivität in der Ökonomie durch eine zunehmende Vielfalt an Zwischenprodukten steigt. Dies kann als moderne Formulierung der berühmten These von Smith (1776) verstanden werden, dass zunehmende Spezialisierung (hier ausgedrückt in einer immer größer werdenden Vielfalt der Zwischenprodukte) den Wohlstand einer Nation steigert.

In diesem Kapitel wird eine andere von Grossman und Helpman vorgeschlagene Möglichkeit, Produktivitäts- und Outputwachstum zu modellieren, vorgestellt (Grossman & Helpman 1991a, Kapitel 4): Wachstum durch Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte. Die Struktur dieses Modells entspricht der des Grossman-Helpman-Varietäten-Modells. Im Unterschied zu diesem werden aber nicht neue Produkte durch F&E erzeugt, sondern vorhandene werden in ihrer Qualität verbessert. Ähnliche Modelle stammen von Aghion & Howitt (1992, 1998) und Segerstrom, Anant & Dinopoulos (1990). Das Modell des nächsten Kapitels wird das gleiche Verfahren anwenden, Qualitätsverbesserungen abzubilden.

### 5.1 Beschreibung des Modells

Im Großen und Ganzen sind sich die beiden Modelle von Grossman und Helpman ziemlich ähnlich. Die Konsumenten in der Ökonomie sind identisch, Arbeit wird wieder in F&E und der Zwischenproduktherstellung eingesetzt, im Endproduktsektor wird das homogene Konsumgut aus den Zwischenprodukten ohne

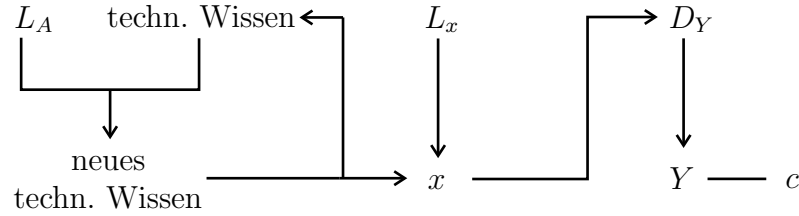


Abbildung 5.1: Die Struktur des Modells

weitere Kosten zusammengesetzt, und die Quelle langfristigen Fortschritts ist wieder gezielte Forschung. Der wichtige Unterschied hier ist aber genau dieser Forschungsprozess. Es werden nicht neue Produktlinien erfunden, sondern existierende Produkte werden in ihrer Qualität verbessert. Diese Modifikation hat zwei Vorteile: Erstens bleibt die eingesetzte Arbeit in einer Produktlinie konstant. Im Varietäten-Modell sinkt sie exponentiell. Die konstante Arbeitsmenge, die in der Zwischengutherstellung eingesetzt wird,  $L_x$ , muss auf immer mehr Sektoren aufgeteilt werden. Zweitens kommt es zu „kreativer Zerstörung“. Qualitativ bessere Produkte verdrängen die alten und „zerstören“ deren Markt. Es kommt zu einer Gewinnverlagerung vom alten Qualitätsführer zum neuen. Damit wird ein wichtiges Charakteristikum realer wachsender Marktwirtschaften abgebildet. Die Struktur der Ökonomie ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Allerdings wird Forschung hier von den Zwischenproduktherstellern selbst betrieben. Es gibt keinen eigenen Forschungssektor.<sup>1</sup>

Außerdem wird über Forschung angenommen, dass sie ein unsicherer Prozess ist. Im Varietäten-Modell ist dies nicht der Fall. Die mechanistische Forschungstechnologie, Gleichung (2.3), liefert sicher mehr Patente, wenn mehr Ressourcen in Forschung gesteckt werden.

Wegen dieser Vorteile erscheinen Modelle mit Wachstum durch Qualitätsverbesserung im Vergleich zu den Varietätenmodellen als besser geeignet, um Wachstum durch Innovationen zu modellieren. Beispielsweise argumentieren Aghion & Howitt (2006, S. 272):

„that the Schumpeterian paradigm holds the best promise of delivering a systematic, integrated, and yet operational framework for analyzing and developing context-dependent growth policies . . . , whereas

<sup>1</sup>Auf diesen Aspekt wird in Kapitel 7 näher eingegangen.

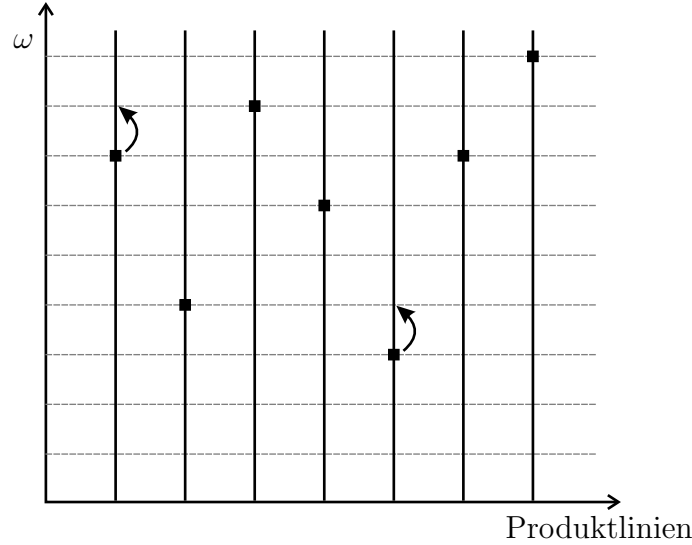


Abbildung 5.2: Erreichte Qualitätsstufen in den einzelnen Produktlinien (aus Grossman & Helpman (1991a)).

the AK and the product variety paradigms fail to fully deliver on those promises.“

Wie im Modell des letzten Kapitels wird wieder eine allgemeinere Nutzenfunktion als im ursprünglichen Modell von Grossman und Helpman unterstellt. Zu den Änderungen im Einzelnen.

### 5.1.1 Endprodukthersteller

Kompetitive Firmen setzen aus einer Vielzahl unterschiedlicher Zwischenprodukte,  $j$ , das Endprodukt gemäß folgender Produktionsfunktion zusammen:

$$Y = \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^{\omega} x_{\omega}(j) \right] dj \right\}.$$

Weil die Anzahl an Varietäten nicht wächst, wird sie zur Vereinfachung auf eins normiert. In jeder Produktlinie können verschiedene Qualitäten,  $\omega(j)$ , hergestellt werden, die, ausgehend von der „Basisqualität“,  $\omega = 1$ , durch gezielte Forschung erreicht werden können. Die höchste Qualität in einem Sektor,  $\Omega(j)$ , ist in Abbildung 5.2 durch ein schwarzes Quadrat dargestellt. Gelingt die Innovation, dann steigt die Qualität in diesem Sektor diskret um eine Stufe. Alle

darunter liegenden Qualitäten können prinzipiell weiter produziert werden. In der qualitätsangepassten, eingesetzten Menge eines Zwischenproduktes,  $\lambda^\omega x_\omega(j)$ , stellt  $\lambda (> 1)$  die Höhe der „Qualitätsstufen“ dar und  $x_\omega(j)$  die physische Menge. Wie weiter unten gezeigt wird, werden im Gleichgewicht aber nur die höchsten Qualitäten einer Varietät eingesetzt, so dass sich die Produktionsfunktion auf folgenden Ausdruck vereinfacht:

$$Y = \exp \left\{ \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj \right\}. \quad (5.1)$$

### 5.1.2 Zwischenproduktsektor und F&E

Zwischenprodukthersteller setzen Arbeit ein, um qualitativ bessere Produkte zu entwickeln. Die Wahrscheinlichkeit für eine Innovation im Intervall  $dt$  für eine Firma ist  $I(j)dt$ .  $I(j)$  wird mit Arbeitseinsatz gemäß

$$I(j)dt = \frac{L_A(j)}{a} dt \quad (5.2)$$

erreicht.  $a$  ist wieder ein Produktivitätsparameter von Forschungsarbeit. Unter der Annahme von Symmetrie bezüglich Arbeit in F&E folgt  $I dt = (L_A/a) dt$ . Mit  $I dt$  als Wahrscheinlichkeit einer Firma für eine Verbesserung und weil ein Kontinuum von Masse eins an Sektoren angenommen wird, folgt aus dem Gesetz der großen Zahl, dass die Anzahl an Märkten mit Qualitätsverbesserungen in  $dt$  auch  $I dt$  beträgt.

Gelingt die Innovation, dann steigt die Qualität in diesem Sektor um eine Stufe,  $d\Omega(j) = 1$ . Die Gesamtzahl an Qualitätsverbesserungen in einem Intervall der Länge  $dt$  beträgt dann:  $\int_0^1 d\Omega(j) dj$ . Wird  $dt$  sehr kurz gewählt, so dass in einer einzelnen Produktlinie maximal eine Qualitätsverbesserung stattfinden kann, dann beträgt die Anzahl von Märkten mit Qualitätsverbesserungen:  $\int_0^1 d\Omega(j) dj = d \int_0^1 \Omega(j) dj$ . Damit ergibt sich für die Anzahl von Märkten mit Qualitätsverbesserungen in einem kurzen Intervall  $dt$ :

$$d \int_0^1 \Omega(j) dj = I dt. \quad (5.3)$$

Gelingt eine Innovation in einem Sektor, dann wird ein Patent für genau diese Qualitätsstufe in diesem Sektor vergeben. Niedrigere Qualitäten dürfen weiterhin produziert werden. Die Patente werden von Zwischenproduktherstellern gehalten, können jetzt aber wertlos werden, falls eine Innovation im gleichen Sektor gelingt.

Der Wert eines Patents und damit der Wert eines Zwischenproduktherstellers entspricht somit dem Erwartungswert der Summe der diskontierten künftigen Gewinne aus der Zwischenproduktherstellung:

$$P_A(t) = E \left[ \int_t^{\tilde{t}} e^{-\int_t^{\tau} r(s) ds} \pi(\tau) d\tau \right]. \quad (5.4)$$

$\tilde{t}$  ist der Zeitpunkt, in dem ein Konkurrent eine Erfindung macht und das Patent wertlos wird, und ist eine Zufallsvariable.<sup>2</sup>

## 5.2 Dynamisches Gleichgewicht

Firmen im Endproduktsektor maximieren wieder ihre Gewinne

$$\max_{x_{\Omega(j)}(j)} \exp \left\{ \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj \right\} - \int_0^1 p_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) dj$$

über die nachgefragten Mengen der Zwischengüter. Das Endprodukt wurde wieder als Numeraire gewählt, und es wurde unterstellt, dass nur die höchsten Qualitäten einer Produktlinie eingesetzt werden. Dies wird weiter unten noch hergeleitet, vereinfacht aber hier die Berechnung enorm. Die Nachfrage nach einem Zwischenprodukt aus Sektor  $j$  in der höchsten Qualitätsstufe  $\Omega(j)$  beträgt

$$x_{\Omega(j)}(j) = \frac{Y}{p_{\Omega(j)}(j)}.$$

Die Nachfrage hat eine Preiselastizität von  $-1$ . Ein Anbieter von Gut  $j$  in Qualitätsstufe  $\Omega(j)$  möchte deshalb die Menge möglichst weit einschränken, weil der Preisanstieg den Umsatzrückgang durch die sinkende Menge genau ausgleicht. Die dabei sinkenden Produktionskosten steigern den Gewinn. Allerdings sind die verschiedenen Qualitäten einer Produktlinie perfekte Substitute, wenn sie um die unterschiedliche Qualität bereinigt werden. Die Preissetzungsmacht des Anbieters von Stufe  $\Omega(j)$  wird dadurch eingeschränkt. Ein Zwischenprodukt, das um eine Stufe höher steht als ein anderes der gleichen Produktlinie, bringt  $\lambda$  mal soviel an „Qualitätsdiensten“. Also darf es auch  $\lambda$  mal soviel kosten. Der Qualitätsführer hat also die Möglichkeit, sich die ganze Marktnachfrage zu sichern, wenn er marginal unter diesem Aufschlag bleibt. Im Vergleich mit seinem direktesten Konkurrenten muss also  $p_{\Omega(j)}(j)$  marginal unter  $\lambda p_{\Omega(j)-1}(j)$  bleiben. Der

---

<sup>2</sup>Siehe den Anhang zu diesem Kapitel für nähere Erläuterungen.

niedrigste Preis, zu dem der Nachfolger ohne Verluste produzieren kann, entspricht seinen Grenzkosten  $w$ . Es folgt<sup>3</sup>

$$p_{\Omega(j)}(j) \equiv p = \lambda w. \quad (5.5)$$

Diese Argumentation gilt natürlich auch für alle niedrigeren Qualitätsstufen. Dem Qualitätsführer ist es möglich, sämtliche Konkurrenten der gleichen Produktlinie aus dem Markt zu preisen,<sup>4</sup> weshalb die Vereinfachung oben, dass nur die höchsten Qualitäten einer Produktlinie eingesetzt werden, gerechtfertigt ist.

Für den Gewinn der Zwischenprodukthersteller,  $\pi(j) = [p(j) - w]x(j)$ , folgt mit diesem Preis und  $x = Y/p$  als Nachfrage

$$\pi = \frac{\lambda - 1}{\lambda} Y. \quad (5.6)$$

Im Appendix wird gezeigt, dass der erwartete Barwert dieser Gewinne auch als

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s) + I(s)] ds} \pi(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

geschrieben werden kann. Die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt lautet jetzt

$$r = \frac{\pi}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A} - I. \quad (5.8)$$

Diese Gleichung wird auch im Appendix hergeleitet. Links steht wieder die Rendite bei sicherer Anlage, rechts die Rendite bei Kauf eines Patents. Weil das Patent wertlos werden kann, wenn einem Konkurrenten eine Innovation gelingt, wird vom Kapitalgewinn,  $\dot{P}_A/P_A$ , und von der Dividendenrendite,  $\pi/P_A$ , noch diese Wahrscheinlichkeit abgezogen.

Im Steady state ist  $I = L_A/a$  konstant, weil die Bevölkerung nicht wächst. Der Zins,  $r$ , und die Wachstumsrate von  $P_A$  sind im Steady state auch konstant. Aus (5.8) folgt, dass die Gewinne,  $\pi$ , und Patentwerte,  $P_A$ , mit der gleichen Rate wachsen müssen:  $\dot{P}_A/P_A = \dot{\pi}/\pi$ . Aus (5.6) wird ersichtlich, dass auch  $\dot{Y}/Y$  mit

---

<sup>3</sup>Genauer müsste die linke Seite marginal kleiner sein. Zur Vereinfachung wird hier angenommen, dass die Produzenten im Endproduktsektor bei Indifferenz immer die höhere Qualität wählen.

<sup>4</sup>Es wird also Bertrand-Wettbewerb unterstellt.

dieser Rate wachsen muss. Die Arbitragegleichung umgeformt und den Ausdruck für die Gewinne (5.6) und die Ramsey-Regel (2.12) eingesetzt, führt zu<sup>5</sup>

$$P_A = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{Y}{\rho + (\sigma - 1) \frac{\dot{Y}}{Y} + I}. \quad (5.9)$$

Die Wachstumsrate von  $Y$  im letzten Ausdruck kann noch ersetzt werden. Aus der vereinfachten Produktionsfunktion für  $Y$ , Gleichung (5.1), ergibt sich mit  $x(j) = x$  und  $\Delta \equiv \lambda \exp[\int_0^1 \Omega(j) dj]$ :

$$Y = x \Delta. \quad (5.10)$$

Weil  $x = L_x$  im Steady state wegen der gleichbleibenden Bevölkerungsgröße konstant ist, folgt mit (5.3)

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} = (\ln \lambda) \frac{d \int_0^1 \Omega(j) dj}{dt} = (\ln \lambda) I. \quad (5.11)$$

Die Forschungsintensität  $I$  ist direkt proportional zum Arbeitseinsatz in Forschung,  $L_A$ . Es ist deshalb auch in diesem Modell wieder entscheidend für die langfristige Wachstumsrate, wie hoch dieser Faktoreinsatz ist. Für den Patentwert (5.9) folgt dann

$$P_A = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{Y}{\rho - (1 - \sigma)(\ln \lambda)I + I}. \quad (5.12)$$

Ein Zwischenprodukthersteller maximiert im Zeitintervall  $dt$  über die aufgewendete Forschungsintensität,  $I dt = (L_A/a) dt$ , seine Gewinne. Hierbei wird wieder unterstellt, dass der Arbeitseinsatz in F&E symmetrisch verteilt ist:  $L_A(j) = L_A$ . Und weil die Gewinne in allen Sektoren gleich hoch sind (ersichtlich aus Gleichung (5.6)), ergibt sich mit dieser Annahme außerdem, dass die Belohnung für erfolgreiche Forschung,  $P_A$ , unabhängig davon ist, in welchem Sektor Forschung betrieben wird. Damit folgt

$$\max_{I dt} P_A I dt - w a I dt.$$

Für eine positive, endliche Nachfrage nach Beschäftigung in Forschung muss gelten:  $P_A = w a$ . Wäre der Patentwert größer als  $w a$ , dann würde unbegrenzt Arbeit im Forschungssektor nachgefragt. Bei  $P_A < w a$  wäre die Beschäftigung null.

---

<sup>5</sup>Wegen konstanter Bevölkerungsgröße gilt wieder  $\dot{c}/c = \dot{Y}/Y$ .

Für eine positive, aber endliche Beschäftigung in F&E folgt die „free-entry“-Bedingung

$$P_A \begin{cases} = wa & \text{für } I > 0 \\ \leq wa & \text{für } I = 0 \end{cases}.$$

Aus dieser „free-entry“-Bedingung (für  $I > 0$ ),  $L_x = x = Y/(\lambda w)$  und Gleichung (5.12) erhält man einen Zusammenhang zwischen dem Arbeitseinsatz in der Zwischenproduktherstellung und der Forschungsintensität:

$$L_x = \frac{a}{\lambda - 1} [\rho - (1 - \sigma)(\ln \lambda)I + I].$$

Ein zweiter Zusammenhang ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für den Arbeitsmarkt und der Forschungstechnologie:

$$L_x = L - aI. \quad (5.13)$$

Diese zwei Gleichungen legen die Arbeitsaufteilung und die gleichgewichtige Forschungsintensität fest:

$$I = \frac{1}{\lambda - (1 - \sigma) \ln \lambda} \left[ (\lambda - 1) \frac{L}{a} - \rho \right].$$

Damit ergibt sich über (5.11) die gleichgewichtige Wachstumsrate des Marktsystems:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\ln \lambda}{\lambda - (1 - \sigma) \ln \lambda} \left[ (\lambda - 1) \frac{L}{a} - \rho \right]. \quad (5.14)$$

Diese steigt wieder mit der Größe der Bevölkerung,  $L$ , der Produktivität der Forscher,  $1/a$ , und der intertemporalen Substitutionselastizität,  $1/\sigma$ , und fällt mit zunehmender Diskontierung,  $\rho$ . Außerdem bedeuten höhere „Qualitätsstufen“,  $\lambda$ , auch schnelleres Wachstum: Gleichung (5.14) nach  $\lambda$  abgeleitet, ergibt

$$\frac{\partial \left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)}{\partial \lambda} = \frac{\frac{L}{a} \left[ \frac{\lambda}{\ln \lambda} - (1 - \sigma) \right] - \frac{\ln \lambda - 1}{(\ln \lambda)^2} \left[ (\lambda - 1) \frac{L}{a} - \rho \right]}{\left[ \frac{\lambda}{\ln \lambda} - (1 - \sigma) \right]^2}.$$

Der Nenner ist immer positiv. Die Forschungsintensität in der Ökonomie kann maximal  $L/a$  betragen, wenn sämtliche Arbeit in F&E eingesetzt wird. Damit folgt für die Wachstumsrate:



$$\frac{L}{a} \ln \lambda \geq \frac{\dot{Y}}{Y}. \quad (5.15)$$

Diese Bedingung impliziert, dass auch der Zähler in der Ableitung positiv ist. Für diesen gilt:

$$\frac{L}{a} - \frac{\ln \lambda - 1}{(\ln \lambda)^2} \frac{(\lambda - 1) \frac{L}{a} - \rho}{\frac{\lambda}{\ln \lambda} - (1 - \sigma)} = \frac{L}{a} - \frac{\ln \lambda - 1}{(\ln \lambda)^2} \frac{\dot{Y}}{Y}$$

bzw.

$$\frac{L}{a} \ln \lambda - \frac{\ln \lambda - 1}{\ln \lambda} \frac{\dot{Y}}{Y}.$$

Weil  $(\ln \lambda - 1)$  immer kleiner ist als  $(\ln \lambda)^2$ , ist der Bruch vor der Wachstumsrate von  $Y$  immer kleiner als eins. Wegen (5.15) ist dann die letzte Gleichung und damit der Zähler in der Ableitung immer positiv. Mit dem ebenfalls positiven Nenner bedeuten also höhere Qualitätsstufen eine höhere langfristige Wachstumsrate.

Allerdings ist auch in diesem Modell wieder eine Einschränkung für die zulässigen Parameterbereiche durch die Transversalitätsbedingung,  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) \xi(t) = 0$ , zu beachten. Der Wertpapierbestand der Haushalte,  $B(t)$ , ist hier  $P_A(t)$ . Aus Gleichung (5.12) folgt  $\dot{P}_A/P_A = \dot{Y}/Y$ . Mit  $\dot{\xi}/\xi = r$  (siehe (2.10)) und der Ramsey-Regel ergibt sich

$$\rho > (1 - \sigma) \frac{\dot{Y}}{Y}. \quad (5.16)$$

Weil  $\rho > 0$ , kann diese Beschränkung wieder nur für  $\sigma < 1$  bindend sein.

## 5.3 Stabilität

Die Stabilitätseigenschaften des Modells sind die gleichen wie im Varietätenmodell. Die Ökonomie springt ohne Anpassungsdynamik in den Steady state. Die Analyse erfolgt analog zum Varietätenmodell.

Weil  $A$  auf eins normiert wurde, ist  $\kappa = Y/P_A$  das Verhältnis von Output zum Gesamtwert der Patente, das im Steady state konstant ist. Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Arbeitsmarkt, (5.13), und da die Forschungsintensität nicht negativ sein kann, folgt  $I = \max \{0; L/a - L_x/a\}$ . Mit  $L_x = Y/(\lambda w)$  und der „free-entry“-Bedingung in Forschung ergibt sich die Ressourcenbeschränkung für die Ökonomie

$$I = \max \left\{ 0; \frac{L}{a} - \frac{1}{\lambda} \kappa \right\}. \quad (5.17)$$

In Abbildung 5.3 ist sie durch die dicke, geknickte Linie in beiden Grafiken dargestellt. Die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt (5.8) und die Ramsey-Regel ergeben

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = I + \rho - \frac{\lambda - 1}{\lambda} \kappa + \sigma \frac{\dot{Y}}{Y}. \quad (5.18)$$

Für  $\dot{Y}/Y$  lässt sich folgender Ausdruck herleiten:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (\ln \lambda) I + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa}. \quad (5.19)$$

Dazu wird die „free-entry“-Bedingung,  $P_A = wa$ , umgeformt:  $Y = wa\kappa$ . Es folgt:  $\dot{Y}/Y = \dot{w}/w + \dot{\kappa}/\kappa$ . Wegen (5.5) gilt  $\dot{w}/w = \dot{p}/p$ . Gleichung (5.10) und Nullgewinne im Endproduktsektor ( $\int_0^1 px \, dj = px = Y$ ) implizieren  $p = \Delta$ . Mit (5.11) folgt  $\dot{w}/w = \dot{p}/p = \dot{\Delta}/\Delta = (\ln \lambda) I$  und damit (5.19). Preise für Zwischenprodukte und Löhne wachsen mit der gleichen Rate wie der Qualitätsindex  $\Delta$ . Steigende Löhne bedeuten wegen konstanter Preise für das Endprodukt, dass die Realeinkommen für die Bevölkerung wachsen.

Gleichungen (5.18) und (5.19) in  $\dot{\kappa}/\kappa = \dot{Y}/Y - \dot{P}_A/P_A$  einsetzen:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{1 - \sigma}{\sigma} (\ln \lambda) I - \frac{I}{\sigma} - \frac{\rho}{\sigma} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\kappa}{\sigma}.$$

Der  $\dot{\kappa} = 0$ -Lokus wird durch die Gleichung

$$\kappa = \frac{\lambda}{\lambda - 1} [I + \rho - (1 - \sigma)(\ln \lambda) I] \quad (5.20)$$

bestimmt und wird durch die steigende Gerade in Abbildung 5.3 dargestellt. Oberhalb davon steigt  $\kappa$ , darunter fällt  $\kappa$ . Auch hier ist einfach zu sehen, dass die Gerade steigend verläuft. Würde sie fallen, dann wäre der Schnittpunkt mit der Abszisse bei  $I = \rho / [(1 - \sigma) \ln \lambda - 1]$  bzw. wäre  $\rho = I[(1 - \sigma) \ln \lambda - 1] = (1 - \sigma) \dot{Y}/Y - I$ . Dies widerspricht aber der Parameterrestriktion aus der Transversalitätsbedingung, (5.16). Gleichung (5.20) kann damit nicht fallend verlaufen.

Nun kann wieder einfach gezeigt werden, dass der Steady state unverzüglich erreicht wird, weil Punkte oberhalb und unterhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Geraden ausgeschlossen werden können. Der so erreichte Steady state ist in Abbildung 5.3 wieder der Schnittpunkt der beiden Geraden. Die Ökonomie wächst, wenn  $\lambda L/a$

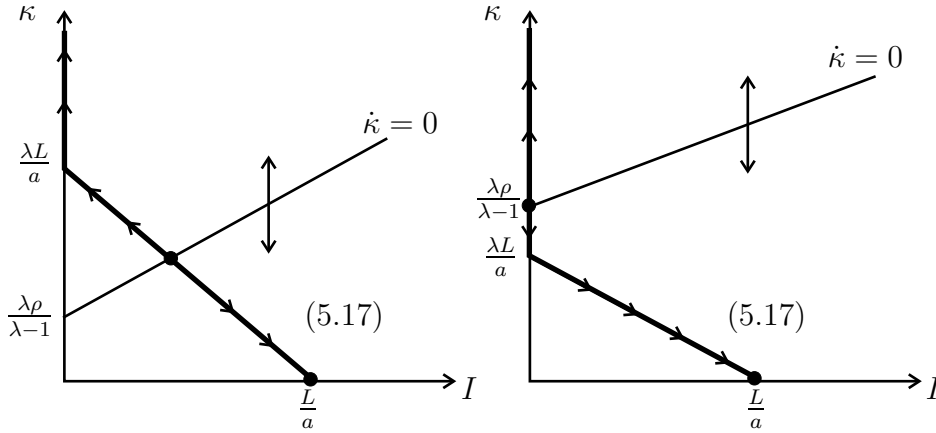


Abbildung 5.3: Stabilität im Grossman-Helpman-Modell

größer ist als  $\lambda\rho/(\lambda-1)$  (linke Grafik), sie stagniert im umgekehrten Fall (rechte Grafik).

Oberhalb der Geraden würde  $I$  gegen null, und  $\kappa$  gegen unendlich gehen. Ohne Forschung wäre  $Y$  konstant. Damit müsste  $P_A$  gegen null gehen. Weil aber weiterhin positive Gewinne gemacht werden, ist dies nicht mit rationalen Erwartungen vereinbar.

Unterhalb des  $\dot{\kappa} = 0$ -Lokus würde ein Steady state mit  $I = L/a$  und  $\kappa = 0$  (asymptotisch) erreicht. Auch dies ist nicht möglich. Patentwert  $P_A(t)$  und Output  $Y(t)$  wachsen mit der gleichen Rate (siehe (5.6)). Die Gewinne folgen deshalb der Funktion  $\pi(\tau) = \pi(t) \exp[(\tau - t)\dot{Y}/Y]d\tau$ . Für den Patentwert (5.7) ergibt sich

$$\frac{P_A(t)}{Y(t)} = \frac{\lambda-1}{\lambda} \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)-\frac{\dot{Y}(s)}{Y(s)}]ds} d\tau.$$

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung konvergiert, wenn  $r(t) + I(t) - \dot{Y}(t)/Y(t) > 0$ . Mit der Ramsey-Regel folgt

$$\rho + I(t) > (1-\sigma) \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}.$$

Weil  $I$  nicht negativ werden kann und wegen (5.16) ist diese Bedingung erfüllt.  $P_A(t)/Y(t) = 1/\kappa(t)$  nimmt damit einen endlichen Wert an, und  $\kappa$  kann nicht gegen null gehen. Damit sind auch Werte unterhalb der  $\dot{\kappa} = 0$ -Geraden nicht möglich, und die Ökonomie springt unverzüglich in den Steady state im Schnittpunkt beider Geraden.

## 5.4 Wohlfahrt

Die Wachstumsrate, die das Marktsystem hervorbringt, wird wieder nicht optimal im dem Sinne sein, dass sie externe Effekte mitberücksichtigt. Zu den zwei positiven Effekten aus dem Varietätenmodell – „consumer-surplus“-Effekt und „knowledge-spillover“-Effekt – kommt hier noch ein negativer hinzu: der „business-stealing“-Effekt. Dieser bedeutet, dass ein Teil der Forschungsanreize für die F&E-Firmen eine reine Gewinnverlagerung vom alten Qualitätsführer zum neuen ist und keine gesellschaftlichen Vorteile darstellt. Es könnte also zu übermäßiger Forschung kommen.

Das grundsätzliche Maximierungsproblem für den sozialen Planer ist wieder ähnlich wie im Varietätenmodell. Über eine Erhöhung von  $L_A$  wird die Konsummenge aus statischer Sicht negativ beeinflusst, das künftige Produktionspotential aber positiv beeinflusst. Dieser trade-off ist wieder bestmöglich zu lösen.

Eine erste Beobachtung für den sozialen Planer ist, dass er nur höchste Qualitäten verwenden würde, weil diese die gleichen Inputs erfordern wie schlechtere Qualitäten. Die Produktionsfunktion ist also mit (5.1) gegeben. Aus (5.10) erhält man mit  $x = L_x = L - L_A$ :  $Y = (L - L_A)\Delta$ . Weil sämtlicher Output konsumiert werden kann, folgt die erste Restriktion

$$c = \frac{L - L_A}{L} \Delta.$$

Die zweite folgt aus der Definition von  $\Delta$ . Über (5.11) ergibt sich (mit  $I = L_A/a$ ) die dynamische Beschränkung

$$\dot{\Delta} = \frac{L_A}{a} (\ln \lambda) \Delta$$

Die Zielfunktion ist weiter die Nutzenfunktion eines Konsumenten. Damit ist die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi_1 \left( \frac{L - L_A}{L} \Delta - c \right) + \xi_2 \frac{L_A}{a} (\ln \lambda) \Delta.$$

Aus  $\partial \mathcal{H} / \partial c = \partial \mathcal{H} / \partial L_A = 0$  und  $\partial \mathcal{H} / \partial \Delta = -\dot{\xi}_2$  folgt

$$\xi_1 = e^{-\rho t} c^{-\sigma}$$

$$\xi_1 = \xi_2 \frac{L}{a} \ln \lambda$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_1 \frac{L - L_A}{L} - \xi_2 \frac{L_A}{a} \ln \lambda. \quad (5.21)$$

Einsetzen der ersten Restriktion in die erste der drei Gleichungen und logarithmisches Differenzieren ergibt

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_1} = -\rho - \sigma \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}.$$

Aus der zweiten Gleichung aus (5.21) ist ersichtlich, dass  $\xi_1$  und  $\xi_2$  mit der gleichen Rate wachsen müssen. Einsetzen dieser Gleichung in die dritte Gleichung aus (5.21) ergibt

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = -\frac{L}{a} \ln \lambda.$$

Die letzten zwei Gleichungen legen die Wachstumsrate von  $\Delta$  und damit die Wachstumsrate von  $Y$  im Optimum fest:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\frac{L}{a} \ln \lambda - \rho}{\sigma}.$$

Ein Vergleich dieser Wachstumsrate mit der im Marktgleichgewicht, Gleichung (5.14), zeigt, dass keine eindeutige Aussage getroffen werden kann, welche höher ist. Die Wachstumsrate im Marktgleichgewicht kann zu niedrig oder zu hoch sein.<sup>6</sup> Überwiegt der negative „business-stealing“-Effekt die positiven externen Effekte, dann werden zu viele Ressourcen in Forschung gesteckt, und die gleichgewichtige Wachstumsrate eines Marktsystems ist zu hoch.

---

<sup>6</sup>Um dies zu beweisen, reicht es aus, für jeden Fall ein Beispiel zu finden. Die Modellparameter seien  $\lambda = 1,5$ ,  $L/a = 1$  und  $\rho = 0,1$ . Für  $\sigma = 1$  ist dann die Wachstumsrate im sozialen Optimum mit 30,54% größer als die im Marktgleichgewicht, die 10,81% beträgt. Wird aber  $\sigma$  auf 10 erhöht, dann gilt das Umgekehrte: Erstere ist mit 3,05% kleiner als die Zweite mit 3,15%.

## 5.5 Appendix: Herleitung des Patentwertes und der Arbitragegleichung bei „kreativer Zerstörung“

Ohne die Möglichkeit von Qualitätsverbesserungen, so dass ein Gut eventuell obsolet wird, wäre der Wert eines Patents einfach der Barwert aller künftigen Gewinne, abgezinst mit dem (sicheren) Anlagezins  $r$ . Nun kann es in diesem Modell aber sein, dass ein Gut durch ein qualitativ höherwertiges ersetzt wird, und es keine Nachfrage mehr nach ihm gibt. Dann werden auch keine Gewinne mehr gemacht, und das Patent wird wertlos. Die Gewinne fallen also nur eine gewisse Zeit an. Der Barwert beträgt

$$\int_t^{\tilde{t}} e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds} \pi(\tau) d\tau,$$

wobei  $\tilde{t}$  der Zeitpunkt ist, in dem eine Innovation eines Konkurrenten passiert und das Patent wertlos wird. Dieser Zeitpunkt, der die Dauer der Marktführerschaft festlegt, ist eine Zufallsvariable, die einem Poisson-Prozess unterliegt, weil ein Konkurrent eine Verbesserung mit der Wahrscheinlichkeit  $I(t)dt$  pro Zeiteinheit macht. Es tritt also Unsicherheit über die künftigen Gewinne ein.

Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten gezeigt, diese Unsicherheit bei der Barwertberechnung zu berücksichtigen. Die erste besteht darin, den sicheren Zins mit einem (Risiko-)Aufschlag als Diskontierungsfaktor zu verwenden. Dieser Aufschlag entspricht der Forschungsintensität  $I(t)$ .

Bezeichne  $p_0(t, \tau + h)$  die Wahrscheinlichkeit (aus Sicht von Zeitpunkt  $t$ ), dass zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $\tau + h$  keine Innovation (eines Konkurrenten) stattfindet. Es ist also die Wahrscheinlichkeit, dass der gegenwärtige Qualitätsführer dies auch in diesem Intervall bleibt und seine Monopolposition behält. Teilt man den Zeitraum  $[t, \tau + h]$  gedanklich in zwei Intervalle  $[t, \tau]$  und  $(\tau, \tau + h]$ , wobei  $h$  ein sehr kurzer Zeitraum sein soll, dann lässt sich diese Wahrscheinlichkeit auch schreiben als  $p_0(t, \tau + h) = p_0(t, \tau)p_0(\tau, \tau + h)$ . Hierbei wird davon Gebrauch gemacht, dass Forschungstätigkeit ein „gedächtnisloser“ Prozess ist. Die erfolglose Forschung im ersten Intervall begünstigt die im zweiten Intervall nicht. Das Gelingen einer Innovation ist in beiden Intervallen unabhängig voneinander.  $h$  sei per Annahme so kurz gewählt, dass in dieser Zeitspanne maximal eine Innovation möglich ist.  $I(t)dt$  ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit für ei-

ne Qualitätsverbesserung im kurzen Intervall  $dt$ .  $p_1(\tau, \tau + h) = I(\tau) h$  ist also die Wahrscheinlichkeit für eine Innovation im Intervall  $h$ , die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - I(\tau) h$  somit die Wahrscheinlichkeit, dass keine Innovation in diesem Zeitraum stattfindet,  $p_0(\tau, \tau + h)$ . Es folgt  $p_0(t, \tau + h) = p_0(t, \tau)[1 - I(\tau) h]$ . Umformen liefert  $[p_0(t, \tau + h) - p_0(t, \tau)]/h = -p_0(t, \tau) I(\tau)$ . Die linke Seite entspricht der Ableitung von  $p_0$  nach der Zeit, also

$$\frac{dp_0(t, \tau)}{d\tau} = -p_0(t, \tau) I(\tau). \quad (5.22)$$

Gleichung (5.22) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer indefiniten Lösung  $p_0(t, \tau) = Ae^{-\int_t^\tau I(s)ds}$ . Für  $\tau = t$  gilt  $p_0(t, t) = Ae^0 = 1$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Innovation passiert, muss hier 100 Prozent betragen. Es folgt  $A = 1$  und

$$p_0(t, \tau) = e^{-\int_t^\tau I(s)ds}.$$

Der (erwartete) Wert eines Patents ist nun der Barwert aller künftigen erwarteten Gewinne, wieder abgezinst mit  $r$ ,

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} E[\pi(\tau)] d\tau,$$

wobei die erwarteten Gewinne in  $\tau$  den Gewinnen in  $\tau$ ,  $\pi(\tau)$ , multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, in  $\tau$  noch Qualitätsführer zu sein, entsprechen:  $E[\pi(\tau)] = \pi(\tau) p_0(t, \tau)$ . Es folgt

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) e^{-\int_t^\tau I(s)ds} d\tau = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) d\tau. \quad (5.23)$$

Dies ist die in (5.4) verwendete Formel für den (erwarteten) Patentwert.

Für einen Steady state, in dem die Forschungsintensität,  $I$ , und der Zins,  $r$ , konstant sind und die Gewinne mit Rate  $\dot{Y}/Y$  wachsen (siehe Gleichung (5.6)), folgt ein Patentwert

$$P_A(t) = \frac{\pi(t)}{r + I - \frac{\dot{Y}}{Y}}. \quad (5.24)$$

Für die zweite Möglichkeit, den Patentwert zu berechnen, wird nicht mehr die Wahrscheinlichkeit verwendet, dass der Gewinn noch anfällt, sondern der

umgekehrte Fall: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Konkurrent erfolgreich ist. Der Patentwert entspricht dem Erwartungswert des Barwertes der Gewinne:

$$P_A(t) = E \left[ \int_t^{\tilde{t}} e^{-\int_t^{\tau} r(s) ds} \pi(\tau) d\tau \right].$$

Für Steady states gilt dann

$$P_A(t) = \frac{\pi(t)}{r - \frac{\dot{\pi}}{\pi}} E \left[ 1 - e^{-\left(r - \frac{\dot{\pi}}{\pi}\right)T} \right], \quad (5.25)$$

wobei  $T \equiv \tilde{t} - t$  die Dauer der Monopolposition darstellt. Zur Berechnung des Erwartungswertes in (5.25) wird die Dichtefunktion der Zufallsvariablen  $T$  gebraucht.

Bezeichne  $p_1(t, \tau + h)$  die Wahrscheinlichkeit (wieder aus Sicht von  $t$ ) für eine Innovation zwischen  $t$  und  $\tau + h$ . Wird der Bereich wieder auf zwei Intervalle aufgespalten, dann ist diese Wahrscheinlichkeit gleich der Summe aus der Wahrscheinlichkeit, dass die Innovation zwischen  $t$  und  $\tau$  passiert, und der Wahrscheinlichkeit, dass sie zwischen  $\tau$  und  $\tau + h$  passiert, vorausgesetzt für diese Wahrscheinlichkeit, dass vorher noch keine Innovation geschehen ist. Formal:

$$p_1(t, \tau + h) = p_1(t, \tau) + p_1(\tau, \tau + h) p_0(t, \tau).$$

Einsetzen von  $p_1(\tau, \tau + h) = I h$  und  $p_0(t, \tau) = 1 - p_1(t, \tau)$  und Umformen ergibt:  $[p_1(t, \tau + h) - p_1(t, \tau)]/h = I[1 - p_1(t, \tau)]$ . Die linke Seite ist für kleine  $h$  wieder die Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{dp_1(t, \tau)}{d\tau} = I[1 - p_1(t, \tau)].$$

Die indefinite Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist  $p_1(t, \tau) = 1 + A e^{-I(\tau-t)}$ . Weil  $p_1(t, t) = 0$  ist, folgt  $A = -1$  und eine definite Lösung

$$p_1(t, \tau) = 1 - e^{-I(\tau-t)}.$$

Die letzte Gleichung gibt für jedes  $\tau$  die Wahrscheinlichkeit an, dass im Intervall  $[t, \tau]$  eine Innovation passiert. Dies ist die Verteilungsfunktion von  $T$ . Die Dichtefunktion ist die Ableitung dieser Verteilungsfunktion nach der Zeit  $dp_1(t, \tau)/d\tau = I e^{-I(\tau-t)}$ , oder mit  $T$  als Dauer der Monopolposition anstatt  $(\tau-t)$ :



$$\frac{dp_1(T)}{dT} = Ie^{-IT}.$$

Damit folgt

$$E \left[ 1 - e^{-(r - \frac{\dot{Y}}{Y})T} \right] = \int_0^\infty \left[ 1 - e^{-(r - \frac{\dot{Y}}{Y})T} \right] I e^{-IT} dT = \frac{r - \frac{\dot{Y}}{Y}}{r + I - \frac{\dot{Y}}{Y}}.$$

Einsetzen des rechten Ausdrucks in (5.25) ergibt schließlich den Ausdruck für den Wert eines Patents bei Unsicherheit über die künftigen Gewinne

$$P_A(t) = \frac{\pi(t)}{r + I - \frac{\dot{Y}}{Y}}, \quad (5.26)$$

der mit Gleichung (5.24) identisch ist. Beide Wege, den Patentwert zu berechnen, liefern damit das gleiche Ergebnis.

Die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt ergibt sich nun auf sehr einfachem Weg: In der letzten Gleichung wird klar, dass im Steady state  $P_A(t)$  und  $\pi(t)$  mit der gleichen Rate wachsen müssen, weil  $r$ ,  $I$  und  $\dot{Y}/Y$  konstant sind. Aus (5.6) wird ersichtlich, dass auch  $Y$  mit dieser Rate wächst. Damit folgt  $\dot{Y}/Y = \dot{P}_A/P_A$ . Nach Umformen von Gleichung (5.26) erhält man schließlich die Arbitragegleichung (5.8).

Die Arbitragegleichung gilt allerdings nicht nur im Steady state: Durch Ableiten von (5.23) nach der Zeit erhält man – unter Verwendung der Leibniz-Regel – ebenso die Arbitragegleichung (5.8). Ableiten von (5.23) nach  $t$ :

$$\dot{P}_A(t) = -e^{-\int_t^t [r(s)+I(s)]ds} \pi(t) + \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) [r(t) + I(t)] d\tau.$$

Der erste Ausdruck nach dem Gleichheitszeichen entspricht  $\pi(t)$ . Indem  $[r(t) + I(t)]$  vor das Integral gezogen wird und für das Integral dann  $P_A(t)$  geschrieben wird, folgt auch die Arbitragegleichung (5.8).



# Kapitel 6

## Weitere Qualitäten-Modelle

Der Modellierungsansatz mit Qualitätsleitern bzw. Qualitätsstufen wurde von Segerstrom et al. (1990) eingeführt. Allerdings liegt in diesem Modell der Schwerpunkt mehr auf internationalem Handel als auf Wachstum, und es gibt keine Unsicherheit im Forschungsprozess.

Darauf aufbauend, entwickelten Aghion & Howitt (1992) ein Modell mit Wachstum durch kreative Zerstörung mit Unsicherheit in F&E (siehe auch Aghion & Howitt (1998, Kapitel 2)). Nachteil im Vergleich zum im letzten Kapitel vorgestellten Modell ist, dass es in deren Spezifikation nicht zu einer gleichmäßigen Wachstumsrate kommt. Für die Endproduktherstellung wird nur ein einziges Zwischenprodukt verwendet, welches qualitativ verbessert werden kann. Wenn eine Innovation gelingt, dann springt die Produktion auf ein neues, höheres Niveau. In der Zwischenzeit bleibt sie konstant. Dass das Inlandsprodukt die meiste Zeit unverändert bleibt und in unregelmäßigen Abständen sprunghaft ansteigt, widerspricht allerdings stark der Realität. Das Modell kann deshalb nur als Ausgangspunkt für differenziertere Modellierungsstrategien gesehen werden.

Von Segerstrom (1998) gibt es ein weiteres Modell, das dem von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) sehr ähnlich ist, das aber die Skaleneffekte eliminiert, indem es eine andere Forschungstechnologie unterstellt. Langfristiges Wachstum ist, ähnlich wie in Jones-Modell, nur möglich, wenn die Bevölkerung (bzw. in der alternativen Interpretation für  $L$  das Humankapital) wächst. Eine zu Segerstrom ähnliche Forschungstechnologie wird in Kapitel 7.5 vorgestellt.



## Teil IV

# Das Romer-Modell mit vertikalen Innovationen



# Kapitel 7

## Das Romer-Modell mit qualitätsverbesserndem technischem Fortschritt<sup>1</sup>

In den vorangegangenen Kapiteln wurden verschiedene Modelle vorgestellt, in denen Wachstum entweder aus horizontalen Innovationen (Kapitel 2-4) oder aus vertikalen Innovationen (Kapitel 5 und 6) resultiert. In diesem Kapitel wird ein Modell entwickelt, das die Modelle von Romer (Kapitel 2) und das Qualitäten-Modell von Grossman und Helpman (Kapitel 5) miteinander verbindet. Wachstum entsteht dann durch Qualitätsverbesserungen von Produkten im Rahmen des Romer-Modells.

### 7.1 Einleitung

In Romers bahnbrechendem Artikel „Endogenous Technological Change“ (Romer 1990a) resultiert Wachstum allein dadurch, dass ständig neue Produkte (Kapitalgüter) erfunden werden und diese mit allen alten Zwischenprodukten in der Produktion eines homogenen Endproduktes eingesetzt werden.<sup>2</sup> Obwohl jeder einzelne Produktionsfaktor abnehmende Grenzerträge aufweist, ist anhaltendes endogenes Wachstum möglich, weil ständig neue Kapitalgüter in der Produktion eingesetzt werden. Dem Kritikpunkt, dass in diesem Modell keine Qua-

---

<sup>1</sup>Dieses Kapitel basiert auf Kornprobst (2006).

<sup>2</sup>Das Modell von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 3) ist diesem sehr ähnlich. Darin werden die neuen Produkte nicht als Zwischenprodukte in der Herstellung eines Konsumgutes gesehen. Sie werden unmittelbar konsumiert, wobei eine größere Vielfalt der Produkte einen höheren Nutzen stiftet.

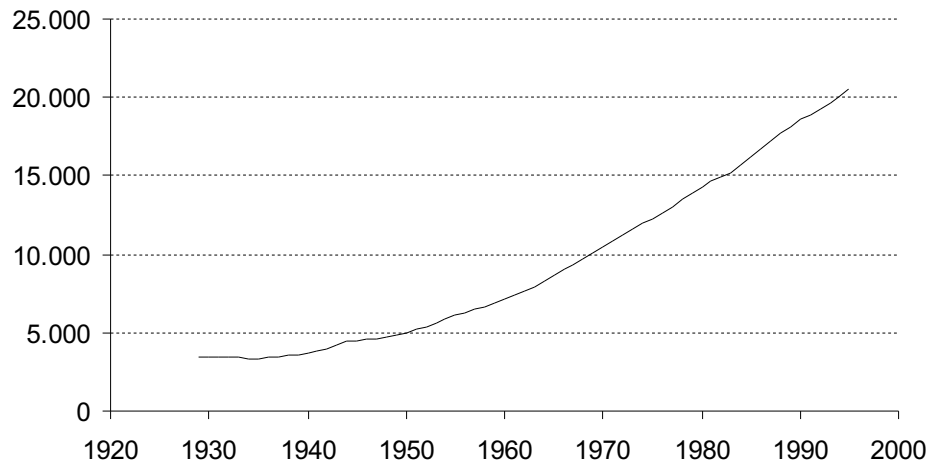


Abbildung 7.1: Entwicklung des Kapitalstocks in den U.S.A. zwischen 1929 und 1995 (aus Katz & Herman (1997)). Angaben in Milliarden USD.

litätsverbesserungen von Produkten existieren, kann noch entgegnet werden, dass die neuen Produkte einfach als bessere alte Produkte interpretiert werden. Allerdings ist der Einwand, dass auch alle alten Zwischenprodukte Verwendung in der Endproduktherstellung finden, nicht zu entkräften. Das würde heißen, dass beispielsweise in der Textilindustrie neben neuen, computergesteuerten Hochleistungsmaschinen noch die ersten elektrischen Siemens-Webstühle aus dem 19. Jahrhundert eingesetzt werden!

Das Romer-Modell beschreibt also Wachstum durch eine zunehmende Vielfalt an Kapitalgütern. Die zweite wichtige Quelle von Wachstum – Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte – wird durch das Romer-Modell nicht adäquat behandelt. Andere Modelle behandeln zwar Wachstum durch Qualitätsverbesserungen explizit,<sup>3</sup> aber sie treffen eine andere Tatsache im Wachstumsprozess nicht, nämlich Wachstum des Kapitalstocks. Beispielsweise hat sich in den USA der reale Kapitalstock zwischen 1929 und 1995 versechsfacht (siehe Abbildung 7.1).<sup>4</sup> Um die Modelle so einfach wie möglich zu machen, wird nämlich einfach ange-

<sup>3</sup>Siehe Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4), Grossman & Helpman (1991b) oder Aghion & Howitt (1992).

<sup>4</sup>Die Zahlen sind allerdings nur eine Approximation für den tatsächlichen Kapitalstock, der nur äußerst schwer zu quantifizieren ist. Sie geben die reale Entwicklung des materiellen, reproduzierbaren Sachvermögens in verketteten Dollar mit Basisjahr 1992 an.



nommen, dass es kein Kapital gibt.

In diesem Kapitel werden die Vorteile beider Modelle verbunden: Zum einen wird Wachstum durch Qualitätsverbesserungen generiert, wobei ältere, minderwertige Produkte überflüssig werden. Zum anderen ist Kapital ein notwendiger Faktor in der Produktion.

Zwar gibt es sowohl von Aghion & Howitt (1998, Kapitel 3) als auch von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 5) Modelle, in denen Kapital in einem Qualitäten-Modell vorkommt. Diese unterscheiden sich aber in anderen wichtigen Punkten von dem hier behandelten Modell. Bei Grossman/Helpman wird zwischen Kapital und Zwischengütern unterschieden, wobei letztere mit Arbeit als alleinigem Faktoreinsatz produziert werden und nur diese qualitativ immer besser werden. Diese Vorgehensweise wird der Tatsache nicht gerecht, dass sich technischer Fortschritt zumeist in besseren Kapitalgütern ausdrückt. Bei Aghion/Howitt weisen Kapitalgüter aus verschiedenen Produktlinien eine Substitutionselastizität größer als eins auf, weshalb eine Unterscheidung in der Art der Innovation (drastisch vs. nicht-drastisch) nötig wird. Mit der hier gewählten Produktionsfunktion wird die Analyse einfacher.<sup>5</sup> Der größere Einwand liegt allerdings in den starken intersektoralen Spillover-Effekten, die Aghion und Howitt unterstellen. Auf diesen Punkt wird später noch näher eingegangen.

Es wird wie folgt vorgegangen: Abschnitt 2 beschreibt das Modell mit sämtlichen Annahmen. In Abschnitt 3 wird die gleichgewichtige Wachstumsrate einer Marktwirtschaft berechnet. Abschnitt 4 analysiert die Wohlfahrtseigenschaften. Der letzte Abschnitt fasst dann die Ergebnisse kurz zusammen.

## 7.2 Beschreibung des Modells

Die Ökonomie besteht aus zwei Sektoren: einem kompetitiven Endproduktsektor und einem Zwischenproduktsektor, in dem die Kapitalgüter für den Endproduktsektor hergestellt werden. Außerdem wird in diesem an Qualitätsverbesserungen für die Kapitalgüter geforscht. Der Zwischenproduktsektor besteht aus einem Kontinuum an unterschiedlichen Produktlinien, welches zur Vereinfachung die Masse eins hat. Endprodukte werden mit Arbeit und Kapitalgütern über folgende Produktionsfunktion hergestellt:<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>Siehe den Anhang zur Produktionsfunktion.

<sup>6</sup>Hier ist wieder eine Vereinfachung zum originalen Romer-Modell (Romer (1990a)). Dieses unterscheidet zwischen einfacher und qualifizierter Arbeit (Humankapital) im Endproduktsek-

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha, \quad (7.1)$$

wobei  $0 < \alpha < 1$ . Der Ausdruck in den runden Klammern kann als Kapital-Qualitäts-Index  $D_Y$  definiert werden:<sup>7</sup>

$$D_Y = \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\}. \quad (7.2)$$

Der Ausdruck  $\lambda^\omega x_\omega(j)$  ist die qualitätsangepasste Einsatzmenge eines Kapitalgutes  $j$ .  $\omega = 1$  ist die niedrigste Qualitätsstufe,  $\Omega(j)$  die höchste in Produktlinie  $j$ .<sup>8</sup> Steigt die höchste Stufe  $\Omega(j)$  einer Produktlinie  $j$ , oder steigen die eingesetzten Mengen eines Kapitalgutes, dann steigt der Index und mit ihm der Output des Endproduktes. Die Produktionsfunktion kann geschrieben werden als

$$Y = L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha. \quad (7.3)$$

$L_Y$  ist der Arbeitseinsatz im Endproduktsektor. Die Produktionsfunktion weist konstante Skalenerträge auf: ver- $\theta$ -facht man jeden Faktor, dann ver- $\theta$ -facht sich auch der Output.<sup>9</sup>

Im Zwischenproduktsektor werden Kapitalgüter mit Rohkapital (nicht konsumierter Output des Endproduktsektors) als einzigem Faktor produziert. Aus einer Einheit Rohkapital sollen – ohne weiteren Faktoreinsatz –  $1/\eta(j)$  Einheiten an Kapitalgütern hergestellt werden können. Aus  $K(j)$  Einheiten somit  $K(j)/\eta(j) \equiv \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} x_\omega(j)$  Einheiten Kapitalgüter. Weiter unten wird gezeigt, dass immer nur eine Qualitätsstufe  $\tilde{\omega}$  in jeder Produktlinie  $j$  produziert wird. Der Aus-

---

tor. Im Forschungssektor wird bei Romer Humankapital als Input verwendet, hier auch nur einfache Arbeit. Die Spezifikation im Romer-Modell ist sicherlich realitätsnäher, die vereinfachende Annahme hier hat aber keine wesentlichen Auswirkungen auf die Eigenschaften des Steady-state-Wachstums in der Ökonomie.

<sup>7</sup>Bei Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) steht  $D_Y$  für den momentanen Nutzen eines Konsumenten, dem verschiedene Güter in unterschiedlichen Qualitäten zur Verfügung stehen.

<sup>8</sup>Es wird angenommen, dass zum Anfangszeitpunkt zumindest eine „Basistechnologie“ ( $\omega = 1$ ) in jedem Sektor vorhanden ist.

<sup>9</sup>Ein Beweis befindet sich im am Ende des Anhangs. Außerdem sind bei dieser Technologie Kapitalgüter aus verschiedenen Sektoren keine perfekten Substitute, wie es bei „konventionellen“ Produktionsfunktionen (z.B. im Solow-Modell mit der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion  $Y = (AL)^{1-\alpha} K^\alpha$ ) implizit unterstellt wird. Einige Anmerkungen zu der hier verwendeten Produktionsfunktion finden sich am Ende des Anhangs.

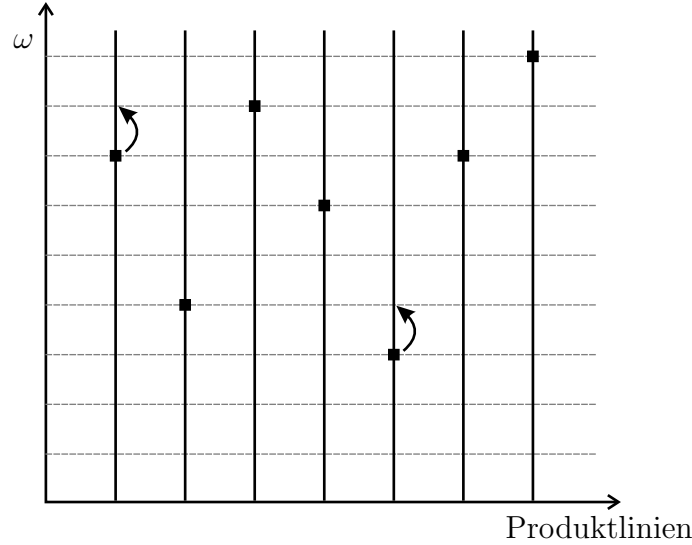


Abbildung 7.2: Erreichte Qualitätsstufen in den einzelnen Produktlinien (aus Grossman & Helpman (1991a)).

druck vereinfacht sich dann zu  $K(j)/\eta(j) = x_{\bar{\omega}}(j)$ . Die Produktionstechnologie sei für alle Produktlinien gleich, so dass  $\eta(j) = \eta$  gilt, und folglich

$$x_{\bar{\omega}}(j) = \frac{K(j)}{\eta}.$$

Für die Kapitalgüter wird zur Vereinfachung angenommen, dass sie keiner Abschreibung unterliegen. Sie haben also eine unendliche Lebensdauer. Außerdem seien sie problemlos wieder in Rohkapital zurück transformierbar, falls das Angebot die Nachfrage aus dem Endproduktsektor übersteigt.

In jeder Produktlinie gibt es verschiedene Qualitätsstufen des Kapitalgutes, wobei höhere Qualitätsstufen durch gezielte Forschung erreicht werden können. Abbildung 7.2 zeigt eine mögliche Verteilung von Qualitätsstufen für die Produktlinien der Ökonomie zu einem beliebigen Zeitpunkt. Die dunklen Quadrate geben die momentan höchste Stufe in einer Produktlinie an. Bei erfolgreicher Forschung erhöht sich die Qualität in einer Produktlinie um eine Stufe. Sie steigt um den Faktor  $\lambda$  an.  $\lambda$  muss größer als eins sein. Der Forschungsprozess hat aber nicht eine mechanistische Form wie die Produktion in den beiden anderen Sektoren (mehr Inputmengen liefern sicher mehr Output) oder in den Wachstumsmodellen, die eine zunehmende Produktvielfalt abbilden (mehr Beschäftigung im F&E-Sektor

generiert sicher mehr neue Produkte).<sup>10</sup> Forschungserfolg ist hier unsicher. Es gilt: Mehr Faktoreinsatz in Forschung liefert eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass eine neue Qualitätsstufe erreicht wird. Forscht eine Firma mit Intensität  $I(j)$  in Produktlinie  $j$ , dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Qualitätsverbesserung im kurzen Zeitintervall  $dt$ :  $I(j) dt$ . Arbeit wird als einziger Faktor eingesetzt. In jeder Produktlinie sei der Arbeitseinsatz gleich hoch. Die Forschungsintensität jeder Firma beträgt

$$I = \frac{L_A}{a}, \quad (7.4)$$

mit  $a$  als Produktivitätsparameter. Für eine bestimmte Wahrscheinlichkeit  $I dt$  benötigt eine Firma  $(L_A/a)dt$  an Faktoreinsatz.

Wird eine neue Qualität eines Produktes entwickelt, dann erhält der Zwischenprodukthersteller ein lebenslanges Patent und hat dann das alleinige Recht, das Produkt in dieser Qualitätsstufe zu produzieren. Niedrigere Stufen der gleichen Produktlinie dürfen hingegen schon noch von den jeweiligen Patenthaltern produziert werden. Allerdings werden sie von den Qualitätsführern aus dem Markt „gepreist“. Hersteller von Zwischenprodukten (Kapitalgütern) haben also eine temporäre Preissetzungsmacht, jene im Endproduktsektor hingegen nicht. Schumpeter (1942/46, Kapitel 8, S.168) beschreibt genau diesen Sachverhalt:

„Eine Unternehmung, die sich auf Papieretiketten für Bierflaschen spezialisiert, kann in der Lage sein, ... sich nach Belieben auf einem bescheidenen, aber immerhin bestimmten Abschnitt der Nachfragekurve zu bewegen, zumindest bis die Metalletikette diese Nachfragekurve zertrümmert.“

Für die Bevölkerung wird angenommen, dass sie aus einem Kontinuum von Masse 1 an Haushalten besteht. Jeder Haushalt habe konstant  $L$  Mitglieder. Die Bevölkerungsgröße bleibt also gleich. Jedes Haushaltsmitglied bietet (unelastisch) eine Einheit Arbeit an, die im Forschungs- oder im Endproduktsektor eingesetzt werden kann. Die Haushalte seien alle identisch und maximieren die intertemporale Nutzenfunktion  $U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} L u(t) dt$ , wobei  $\rho > 0$  gilt.<sup>11</sup> Der momentane Nutzen aus Konsum  $u(t)$  ergibt sich aus der Standard-CES-Nutzenfunktion  $u(t) = [c(t)^{1-\sigma} - 1] / (1 - \sigma)$ , mit  $\sigma > 0$ .<sup>12</sup>

<sup>10</sup>Siehe z.B. Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 3) oder Romer (1990a).

<sup>11</sup>Es wird unterstellt, dass die Individuen ewig leben, oder, dass sie den Konsum ihrer Nachkommen genauso bewerten wie den eigenen.

<sup>12</sup>Die intertemporale Substitutionselastizität beträgt  $1/\sigma$ .

## 7.3 Dynamisches Gleichgewicht

Das Modell wird folgendermaßen gelöst: Zunächst werden die Gewinne der Zwischenprodukthersteller berechnet. Zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung für den Kapitalmarkt und der Bedingung für einen optimalen Konsumpfad wird eine erste Beziehung zwischen Forschungsintensität und Wachstum des Inlandsproduktes hergeleitet. Eine zweite folgt aus der Produktionsfunktion. Beide zusammen legen die gleichgewichtige Forschungsintensität und Wachstumsrate fest. Die Analyse wird in diesem Kapitel nur für Steady states durchgeführt. Jegliche Fragen der Stabilität und der Anpassungsdynamik des Marktgleichgewichts werden im nächsten Kapitel behandelt.

### 7.3.1 Zwischenprodukthersteller

Im Zwischenproduktsektor werden Kapitalgüter aus „Rohkapital“ hergestellt und finden im Endproduktsektor als Input Verwendung. Die Gewinne eines Produzenten  $j$  von Qualität  $\omega$  – ohne die Forschungsausgaben – ergeben sich aus

$$\pi_{\omega}(j) = p_{\omega}(j)x_{\omega}(j) - rK_{\omega}(j),$$

bzw. mit  $K_{\omega}(j) = \eta x_{\omega}(j)$

$$\pi_{\omega}(j) = p_{\omega}(j)x_{\omega}(j) - r\eta x_{\omega}(j).$$

Für die Monopolisten sind nun der optimale Preis und die optimale Ausbringungsmenge zu bestimmen. Die Nachfrage nach Zwischenprodukten, die nicht gekauft, sondern vom Hersteller periodenweise gemietet werden,<sup>13</sup> ergibt sich aus dem Gewinnmaximierungsverhalten des Herstellers des Endproduktes.<sup>14</sup>

---

<sup>13</sup>Damit wird das Preissetzungs-Problem des Monopolisten bei langlebigen Gütern (durable goods monopoly problem) umgangen. Bei langlebigen Gütern stellt der Kauf eines Gutes diese Periode und der Kauf nächste Periode ein enges Substitut dar. Ein früher Kauf schmälert die Nachfrage zum späteren Zeitpunkt. Die gesunkene Nachfrage später liefert aber einen niedrigeren Monopolpreis. Für einen frühen Käufer, der die Preissenkung erwartet, ist es unter Umständen vorteilhaft, seine Käufe aufzuschieben und von den niedrigeren Preisen zu profitieren. Dies ändert aber wieder die Nachfrage und den Monopolpreis zum frühen Zeitpunkt. Für den Monopolisten ergibt sich also ein schwieriges Problem intertemporaler Preisdiskriminierung. Dies soll hier vermieden werden, indem die Güter periodenweise vermietet werden (vgl. Bulow (1982)). Tirole (1988, Abschnitte 1.1.3 und 1.5) gibt eine gute Einführung in das Thema.

<sup>14</sup>Weil konstante Skalenerträge in der Produktion des Endproduktes unterstellt werden, kann man die Entscheidungssituation auch analysieren, indem man eine einzige, preisnehmende Firma unterstellt. Dieser stehen dann sämtliche Inputs in diesem Sektor zur Verfügung.

Die Gewinnfunktion lautet

$$\pi^Y = p_Y Y - \int_0^1 \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_{\omega}(j) x_{\omega}(j) dj - w L_Y.$$

Wählt man das Endprodukt als Numeraire ( $p_Y = 1$ ) und nimmt an, dass nur eine Qualitätsstufe  $\tilde{\omega}$  einer Produktlinie mit dem besten, qualitätsbereinigten Preis in der Produktion des Endproduktes Verwendung findet,<sup>15</sup> dann wird die Gleichung zu  $\pi^Y = Y - \int_0^1 p_{\tilde{\omega}}(j) x_{\tilde{\omega}}(j) dj - w L_Y$  bzw. zu

$$\pi^Y = L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln [\lambda^{\tilde{\omega}} x_{\tilde{\omega}}(j)] dj \right\} \right)^{\alpha} - \int_0^1 p_{\tilde{\omega}}(j) x_{\tilde{\omega}}(j) dj - w L_Y. \quad (7.5)$$

Gewinnmaximierung verlangt  $\partial \pi^Y / \partial x_{\tilde{\omega}}(j) = \partial \pi^Y / \partial L_Y = 0$ . Daraus erhält man als Nachfrage<sup>16</sup> nach Zwischenprodukt  $j$

$$x_{\tilde{\omega}}(j) = \frac{\alpha Y}{p_{\tilde{\omega}}(j)}. \quad (7.6)$$

Die Nachfrage hat eine Preiselastizität von  $-1$ . Ein Anbieter von Gut  $j$  in Qualitätsstufe  $\tilde{\omega}$  möchte deshalb die Menge möglichst einschränken, weil der Preisanstieg den Umsatzrückgang durch die sinkende Menge genau ausgleicht. Die damit sinkenden Produktionskosten steigern den Gewinn. Allerdings sind die verschiedenen Qualitäten einer Produktlinie perfekte Substitute, wenn sie um die unterschiedliche Qualität bereinigt werden. Die Preissetzungsmacht des Anbieters von Stufe  $\tilde{\omega}$  wird dadurch eingeschränkt. Ein Zwischenprodukt, das um eine Stufe höher steht als ein anderes der gleichen Produktlinie, bringt  $\lambda$  mal soviel an „Qualitätsdiensten“. Also darf es auch  $\lambda$  mal soviel kosten. Der Qualitätsführer hat also die Möglichkeit, sich die ganze Marktnachfrage zu sichern, wenn er marginal unter diesem Aufschlag bleibt. Im Vergleich mit seinem direkten Konkurrenten muss also  $p_{\Omega}(j)$  marginal unter  $\lambda p_{\Omega-1}(j)$  bleiben. Der niedrigste Preis, zu dem der Nachfolger ohne Verluste produzieren kann entspricht seinen Grenzkosten  $r\eta$ . Es folgt<sup>17</sup>

---

<sup>15</sup>Dies wird später noch hergeleitet.

<sup>16</sup>Herleitung siehe Anhang.

<sup>17</sup>Genauer müsste die linke Seite marginal kleiner sein. Zur Vereinfachung wird hier angenommen, dass die Produzenten im Endproduktsektor bei Indifferenz immer die höhere Qualität wählen.

$$p_{\Omega}(j) = \lambda p_{\Omega-1}(j) = \lambda r \eta.$$

Diese Argumentation gilt natürlich auch für alle niedrigeren Qualitätsstufen. Dem Qualitätsführer ist es möglich, sämtliche Konkurrenten aus dem Markt zu preisen.<sup>18</sup> Mit (7.6) folgt<sup>19</sup> ein Gewinn in Höhe von

$$\pi = \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) Y, \quad (7.7)$$

der für alle Zwischenprodukthersteller gleich ist.<sup>20</sup> Der Gewinn steigt mit dem gesamten Output in der Ökonomie ( $\partial\pi/\partial Y > 0$ ), mit der Bedeutung der Zwischenprodukte in der Endproduktherstellung ( $\partial\pi/\partial\alpha > 0$ ) und mit der Höhe der Qualitätsstufen ( $\partial\pi/\partial\lambda > 0$ ), die ja den Aufschlag auf die Grenzkosten bestimmen.

Der Wert eines Unternehmens im Zwischenproduktsektor (und damit der Wert eines Patents,  $P_A$ ) entspricht der Summe der erwarteten, diskontierten, künftigen Gewinne aus (7.7). Hierbei ist zu beachten, dass diese Gewinne nur eine gewisse Zeit anfallen, weil ein aktueller Qualitätsführer von einem Konkurrenten überholt und aus dem Markt gedrängt werden kann. Die Barwertberechnung kann auf zwei Wegen erfolgen: 1. Die erwarteten Gewinne werden mit der sicheren Rendite  $r$  abgezinst. Sie fallen eine begrenzte Zeit an. Diese ist die erwartete Dauer der Monopolposition.<sup>21</sup> 2. Auf die sichere Rendite wird eine Risikoprämie aufgeschlagen, der Zeithorizont ist dafür unendlich.<sup>22</sup>

Vorher kann aber noch ausgeschlossen werden, dass ein aktueller Qualitätsführer Forschung betreibt und eventuell mehrere Patente in einer Produktlinie akkumuliert. Grund ist, dass der aktuelle Qualitätsführer immer geringere Forschungsanreize hat als ein Outsider.<sup>23</sup> Im Marktgleichgewicht betreiben dann nur die Outsider Forschung. Dieser Effekt wurde bereits 1962 von Arrow beschrieben und heißt deshalb in der industrieökonomischen Literatur auch „Arrow-Effekt“ oder „replacement-effect“.<sup>24</sup> Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Bei einer Stu-

<sup>18</sup>Es wird also Bertrand-Wettbewerb unterstellt.

<sup>19</sup>Eine kurze Herleitung ist im Anhang.

<sup>20</sup>Der Preis ist unabhängig von  $j$ , die Nachfrage ebenso.

<sup>21</sup>Diesen Weg wählen Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 7).

<sup>22</sup>Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) und Arnold (2005a) verfahren so.

<sup>23</sup>Allerdings argumentiert Cozzi (2004), dass ein Marktführer eigentlich indifferent ist, ob er forscht oder nicht. Etro (2004) zeigt, dass in einem System mit Stackelberg-Wettbewerb immer ein Marktführer die größten Forschungsanreize hat.

<sup>24</sup>Vgl. Arrow (1962b), Dasgupta & Stiglitz (1980) und Tirole (1988, Kapitel 10).

fe Vorsprung beträgt der Gewinn eines Qualitätsführers  $\pi = \alpha(1 - 1/\lambda)Y$ . Der Barwert dieser Gewinne ist  $P_A$ . Bekäme er durch Forschung zwei Stufen Vorsprung, dann könnte er den Preis auf  $\lambda^2 r \eta$  setzen und die Gewinne würden auf  $\pi_2 = \alpha(1 - 1/\lambda^2)Y$  steigen. Bezeichne  $P_{A,2}$  den Barwert dieser Gewinne. Wenn der Qualitätsführer sich entscheidet, eine kurze Zeitspanne  $dt$  Forschung zu betreiben und auch ein Outsider forscht, dann sind vier Zustände möglich, wobei er immer die Kosten für Forschung zu tragen hat: Entweder nur er hat Erfolg, dann beträgt sein Firmenwert  $P_{A,2}$ ; oder er hat keinen Erfolg, aber ein Outsider, dann entstehen ihm nur Kosten, sein Patent und damit seine Firma wird wertlos; oder keiner hat Erfolg, dann behält seine Firma weiterhin den Wert  $P_A$ ; oder beide haben Erfolg, dann entsteht ein Duopol. Im Erwartungswert (und wenn zur Vereinfachung Doppelwahrscheinlichkeiten gestrichen werden) liefert Forschung dann einen Wert in Höhe von  $P_{A,2}Idt + (1 - Idt - Idt)P_A - wL_A(j)dt$ , wobei  $wL_A(j)dt$  seine Kosten sind und  $Idt$  die Wahrscheinlichkeit für erfolgreiche Forschungsanstrengung im Intervall  $dt$  darstellt, die für Qualitätsführer und Outsider annahmegemäß gleich ist. Für den Fall, dass kein Outsider forscht, ergibt sich für den Qualitätsführer ein erwarteter Wert in Höhe von  $P_{A,2}Idt + (1 - Idt)P_A - wL_A(j)dt$ .

Stellt man die gleichen Überlegungen auch für den Outsider an, dann ergibt sich Folgendes: Betreibt ein Outsider Forschung, dann erhält er (im Erwartungswert)  $P_A Idt - wL_A(j)dt$ , unabhängig davon, ob der Qualitätsführer forscht oder nicht.<sup>25</sup> Forscht er nicht, dann ist sein Ertrag null, seine Kosten aber auch.

	Monopolist	
	Forschung	keine Forschung
Outsider		
Forschung	$P_{A,2}Idt + (1 - Idt - Idt)P_A - wL_A dt$	$P_A(1 - Idt)$
Forschung	$P_A Idt - wL_A dt$	$P_A Idt - wL_A dt$
keine F.	$P_{A,2}Idt + (1 - Idt)P_A - wL_A dt$	$P_A$
keine F.	0	0

Für den Qualitätsführer ergibt sich eine dominante Strategie: Er betreibt Forschung, falls  $P_{A,2} - P_A > wL_A(j)/I$ . Auch für einen Outsider ist eine Strategie dominant: Forschung, falls  $P_A > wL_A(j)/I$ .

<sup>25</sup>Der sehr unwahrscheinliche Fall, dass beide Erfolg haben und ein Duopol entsteht, wird also wieder vernachlässigt.



Weil  $\pi_2 - \pi < \pi$ , ist auch  $P_{A,2} - P_A < P_A$ . Ein Qualitätsführer hat also immer weniger Anreize zu forschen. Im Gleichgewicht betreiben nur Outsider Forschung und machen Verbesserungen und es kommt zu „leapfrogging“: Aktuelle Monopolisten werden ständig von Outsidern verdrängt, es kommt nicht zu dauerhaften Monopolpositionen. Der Preisaufschlag auf die Grenzkosten und die Gewinne bleiben damit konstant.

Interessanterweise macht es hier einen Unterschied, ob die Zwischenprodukt-hersteller selbst Forschung betreiben oder ob es einen eigenen Forschungssektor gibt, von dem sie sich die Patente kaufen. In den Varietätenmodellen ist dies egal. Romer (1990a, S.82):

„Whether the owner of the patent manufactures the good itself or licenses others to do so, it can extract the same monopoly profit. Design of new durables and manufacturing could take place within the same firm, but it is easier to describe the equilibrium if the research and development department is treated as a separate firm and designs are transferred for an explicit price.”

Ist nämlich eine Qualitätsverbesserung gelungen und wird das Patent zum Kauf angeboten, dann lautet die Entscheidungssituation für den Qualitätsführer: Kaufe das Patent und erhalte einen Wert in Höhe von  $P_{A,2} - Z$ , wobei  $Z$  die Kosten für das Patent sind, oder kaufe nicht und verliere den Markt. Wenn der Outsider das Patent kauft, erhält er einen Wert in Höhe von  $P_A - Z$ . Weil  $P_{A,2} > P_A$ , hat der Qualitätsführer immer eine höhere Zahlungsbereitschaft als ein Outsider. Patente werden immer von Qualitätsführern gekauft. Dass Forschung von den Zwischenprodukt Herstellern selbst betrieben wird, ist in Modellen, in denen Wachstum durch Qualitätsverbesserungen entsteht, für ihre Handhabbarkeit sehr wichtig.<sup>26</sup>

Wegen Symmetrie in der Nachfrage nach den Zwischenprodukten und weil nur höchste Qualitäten eingesetzt werden, kann die Produktionsfunktion folgendermaßen umgeformt werden:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} x^\alpha \Delta^\alpha, \quad (7.8)$$

---

<sup>26</sup>Bei Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4), Grossman & Helpman (1991b), Aghion & Howitt (1992) und Segerstrom (1998) betreiben die Zwischenguthersteller selbst Forschung. Aghion & Howitt (1998, Kapitel 2, S.56) argumentieren aber fälschlicherweise (aus den oben genannten Gründen), dass es egal ist, wer Forschung betreibt.

wobei  $\Delta$  wie folgt definiert wurde:

$$\ln \Delta = (\ln \lambda) \int_0^1 \Omega(j) dj. \quad (7.9)$$

Für diesen Qualitätsindex wird wieder die zeitliche Entwicklung hergeleitet. Gelingt eine Innovation in einem Sektor  $j$ , dann steigt die Qualität von  $\Omega(j)$  auf  $\Omega(j) + 1$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür im Intervall  $dt$  beträgt  $I(j)dt$  und entspricht der erwarteten Änderung in diesem Sektor. Damit ist die Änderung von  $\ln \Delta$  im Intervall  $dt$

$$d(\ln \Delta) = (\ln \lambda) \int_0^1 [\Omega(j) + 1 - \Omega(j)] I(j) dt dj = (\ln \lambda) \int_0^1 I(j) dt dj.$$

Die Unsicherheit auf sektoraler Ebene diversifiziert sich auf aggregierter Ebene weg, weshalb kein Erwartungswert-Operator benötigt wird. Wegen der Symmetriannahme bezüglich der Forschungsintensität ergibt sich schließlich

$$\frac{d(\ln \Delta)}{dt} = \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} = I \ln \lambda. \quad (7.10)$$

Das Gewinnmaximierungsproblem eines Outsiders im Zeitintervall  $dt$  lautet mit  $I(j) = L_A(j)/a$

$$\max_{L_A(j)dt} P_A(j) \frac{L_A(j)}{a} dt - w L_A(j) dt.$$

Daraus folgt die Bedingung erster Ordnung:  $[P_A(j)/a]dt - wdt = 0$ . Für eine positive, endliche Nachfrage nach Beschäftigung in Forschung muss gelten:  $P_A(j) = wa$ . Der Wert eines Patents entspricht den diskontierten, künftigen Gewinnen aus (7.7) und ist unabhängig von der jeweiligen Produktlinie gleich groß. Wäre der Preis eines Patents größer als  $wa$ , dann würde unbegrenzt Arbeit im Forschungssektor nachgefragt. Bei  $P_A < wa$  wäre die Beschäftigung null. Es folgt

$$P_A \begin{cases} = wa & \text{für } I > 0 \\ \leq wa & \text{für } I = 0 \end{cases}.$$

Die Forschungsintensität in der Ökonomie beträgt  $I = L_A/a$ . Die Arbeitsnachfrage für Forschung also  $L_A = aI$ . Die Arbeitsnachfrage im Endproduktsektor erhält man aus der Bedingung erster Ordnung von Gleichung (7.5)<sup>27</sup>

---

<sup>27</sup>Siehe Anhang.

$$L_Y = (1 - \alpha) \frac{Y}{w}. \quad (7.11)$$

Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt verlangt, dass sich das exogen vorgegebene Arbeitsangebot und die Arbeitsnachfrage entsprechen. Arbeit wird für Forschung und im Endproduktsektor nachgefragt, also:

$$L = aI + (1 - \alpha) \frac{Y}{w}. \quad (7.12)$$

Für die Forschungsintensität ergibt sich nun Folgendes: Ist die Forschungsintensität gleich null, dann ist der Wert eines Patents kleiner oder gleich den Grenzkosten ( $P_A \leq wa$ ). Das gesamte Arbeitsangebot wird im Endproduktsektor eingesetzt ( $L = L_Y$ ) und aus (7.12) erhält man  $w = (1 - \alpha)Y/L$ . Zusammen:  $I = 0$  bedeutet  $P_A \leq a(1 - \alpha)Y/L$ . Ist hingegen  $I > 0$ , dann sind  $P_A$  und  $wa$  gleich groß. Die Beschäftigung im Endproduktsektor ist kleiner als das gesamte Arbeitsangebot ( $L_Y < L$ ) und  $w$  muss größer als  $(1 - \alpha)Y/L$  sein. Gilt also  $I > 0$ , dann ist  $P_A > a(1 - \alpha)Y/L$ .

Zusammen:

$$I = \begin{cases} \frac{L}{a} - \frac{(1 - \alpha)Y}{P_A} & \text{für } P_A > \frac{a(1 - \alpha)Y}{L} \\ 0 & \text{für } P_A \leq \frac{a(1 - \alpha)Y}{L} \end{cases}. \quad (7.13)$$

Der Fall  $I = 0$  wird im Folgenden allerdings nicht mehr behandelt. Sämtliche Arbeit würde im Endproduktsektor eingesetzt, neue Kapitalgüter würden nicht erfunden. Weil die alten fallenden Grenzerträgen unterliegen, wäre Nullwachstum die Folge.

### 7.3.2 Kapitalmarktgleichgewicht

Der Wert eines Patents entspricht den erwarteten, diskontierten, künftigen Gewinnen

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s) + I(s)] ds} \pi(\tau) d\tau. \quad (7.14)$$

Die Forschungsintensität ist gleichzeitig ein Aufschlag auf den sicheren Anlagezins.<sup>28</sup> Ableiten von  $P_A$  nach der Zeit liefert<sup>29</sup>

<sup>28</sup>Eine nähere Begründung findet sich im Anhang.

<sup>29</sup>Auch hierzu ist im Anhang eine kurze Herleitung.

$$r(t)P_A(t) = \pi(t) + \dot{P}_A(t) - I(t)P_A(t). \quad (7.15)$$

Gleichung (7.15) kann so interpretiert werden: Die rechte Seite stellt die erwartete Rendite bei Forschung dar. Sie besteht aus einer Dividende,  $\pi(t)$ , und einem eventuellen Kapitalgewinn,  $\dot{P}_A(t)$ . Außerdem ist es ja noch möglich, dass ein Konkurrent erfolgreich forscht und den Markt für sich gewinnt. In diesem Fall werden das Patent und die Firma wertlos, die Wahrscheinlichkeit dafür entspricht der gesamten Forschungsintensität in dieser Produktlinie. Der erwartete Kapitalverlust aus dieser Möglichkeit ist somit  $I(t)P_A(t)$ . Die linke Seite ist die Rendite des Betrages  $P_A$  bei sicherer Anlage. Weil die Erfolgswahrscheinlichkeiten der einzelnen Produktlinien per Annahme unkorreliert sind und spezifische Risiken vollständig diversifizierbar sind, müssen im Kapitalmarktgleichgewicht die zwei Investitionsmöglichkeiten die gleiche Rendite liefern. Beide Seiten der Gleichung müssen gleich groß sein.

Mit der Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt und der Gewinnleichung der Kapitalgüterproduzenten lässt sich nun  $P_A$  näher bestimmen. Umformen von Gleichung (7.15), Teilen durch  $P_A$  und Einsetzen von (7.7) liefert

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = r + I - \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A}. \quad (7.16)$$

Nimmt man eine positive Forschungsintensität an, dann folgt mit (7.13)<sup>30</sup>

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = r + \frac{L}{a} - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A}. \quad (7.17)$$

Im Steady state muss  $P_A$  mit konstanter Rate wachsen. Dies verlangt, dass  $Y$  und  $P_A$  mit der gleichen Rate wachsen, weil  $L$  als konstant angenommen wurde und auch der Zins im Steady state konstant ist:

$$g_Y = g_{P_A}. \quad (7.18)$$

### 7.3.3 Haushalte

Die Haushalte maximieren die intertemporale Nutzenfunktion

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt$$

---

<sup>30</sup>Siehe Anhang.

gegen die Budgetbeschränkung

$$\dot{B} + Lc = rB + wL.$$

Die linke Seite stellt die Ausgaben für Konsum,  $Lc$ , und den Erwerb von Wertpapieren,  $\dot{B}$ , dar. Auf der rechten Seite stehen die Einkünfte aus Arbeit,  $wL$ , und Wertpapierbesitz,  $rB$ . Das gesamte Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} U(0) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} L \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{B}(t) &= r(t)B(t) + w(t)L - Lc(t) \\ B(0) &= B_0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} &\geq 0. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Die dritte Gleichung in (7.19) besagt, dass ein bestimmter Anfangsbestand an Wertpapieren vorhanden ist, die vierte ist eine No-Ponzi-Game-Bedingung.

Aufstellen der Hamiltonfunktion in Gegenwartsschreibweise (mit  $\xi(t)$  als Schattenpreis von Wertpapieren):

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} L \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi(t) \underbrace{[w(t)L + r(t)B(t) - Lc(t)]}_{\dot{B}(t)}.$$

Daraus ergeben sich folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Optimalität:<sup>31</sup>

$$c(t)^{-\sigma} e^{-\rho t} = \xi(t) \tag{7.20}$$

$$r(t)\xi(t) = -\dot{\xi} \tag{7.21}$$

und die Transversalitätsbedingung,  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) \xi(t) = 0$ . Ableiten von Bedingung (7.20) nach  $t$ , Gleichsetzen mit (7.21) und Umformen liefert die übliche Ramsey-Regel für den optimalen Konsumpfad<sup>32</sup>

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\sigma}. \tag{7.22}$$

<sup>31</sup>Für eine genauere Darstellung siehe Arnold (1997, Kapitel 3 und insb. der Anhang).

<sup>32</sup>Siehe Anhang.

Diese Wachstumsrate des Konsums entspricht der Wachstumsrate von  $Y$ . Dies wird folgendermaßen klar: Gleichgewicht auf dem Markt für das Endprodukt erfordert  $Lc = Y - \dot{K}$ . Teilen durch  $Y$  auf beiden Seiten ergibt

$$\frac{Lc}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K} \frac{K}{Y}.$$

Die Wachstumsrate des Kapitalstocks ist im Steady state konstant. Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Der Kapitalstock einer Produktlinie besteht aus den Kapitalgütern,  $K(j) = \eta x_{\Omega(j)}(j)$ . Der aggregierte Kapitalstock ist somit  $K \equiv \int_0^1 K(j) dj = \eta \int_0^1 x_{\Omega(j)}(j) dj = \eta \int_0^1 \alpha Y / (\lambda \eta r) dj = \alpha Y / (\lambda r)$ . Weil der Zins im Steady state konstant ist, folgt, dass  $Y$  und  $K$  mit der gleichen, im Steady state konstanten, Rate wachsen.

Wenn also  $K/Y$  und  $L$  konstant sind, dann folgt, dass  $c/Y$  auch konstant sein muss. Das bedeutet, dass  $c$  und  $Y$  mit der gleichen Rate wachsen. Insgesamt folgt (zusammen mit (7.18)), dass im Steady state Konsum, Output, Kapitalstock und der Wert der Patente mit gleicher, konstanter Rate wachsen:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{P}_A}{P_A} \quad \text{für } I > 0. \quad (7.23)$$

Die Transversalitätsbedingung hat für die folgende Analyse eine wichtige Implikation, die noch zu verdeutlichen ist. Wenn das Produkt  $B(t)\xi(t)$  mit fortschreitender Zeit gegen null gehen soll, heißt das, dass die Wachstumsrate dieses Ausdrucks negativ sein muss. Das bedeutet, dass  $g_B + g_\xi < 0$  gelten muss. Der Wertpapierbestand der Haushalte  $B$  setzt sich zusammen aus den gehaltenen Anteilen an den Zwischenproduktherstellern und den Ansprüchen auf den Kapitalstock. Beide wachsen im Steady state mit der gleichen Rate  $g_Y$ . Also wächst auch  $B$  mit dieser Rate. Die Wachstumsrate von  $\xi$  ergibt sich, indem man (7.20) nach der Zeit ableitet und anschließend durch  $\xi$  teilt:  $g_\xi = -\sigma g_c - \rho$ . Verwendet man wieder (7.23), dann folgt

$$\rho > (1 - \sigma)g_Y. \quad (7.24)$$

### 7.3.4 Steady state Wachstum

Auflösen von Gleichungen (7.16) und (7.13) nach  $Y/P_A$ , Gleichsetzen und Eliminieren des Zinssatzes, indem (7.22) nach  $r$  aufgelöst und eingesetzt wird, liefert mit (7.23)

$$\frac{1}{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}(g_Y\sigma + \rho + I - g_Y) = \frac{1}{1 - \alpha}\left(\frac{L}{a} - I\right).$$

Durch Umformen erhält man<sup>33</sup>

$$I = \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \frac{L}{a} - \frac{(1 - \alpha)(\sigma - 1)}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} g_Y - \frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \rho \quad (7.25)$$

bzw.

$$g_Y = \frac{1}{(\sigma - 1)} \left[ \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}{1 - \alpha} \frac{L}{a} - \rho - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{1 - \alpha} I \right]. \quad (7.26)$$

Eine zweite Gleichung in  $g_Y$  und  $I$  erhält man aus der Produktionsfunktion für das Endprodukt. Aus (7.3) erhält man direkt  $g_Y = (1 - \alpha)g_{L_Y} + \alpha g_{D_Y}$ . Weil die Bevölkerung nicht wächst und der Anteil der Arbeit, der im Endproduktsektor eingesetzt wird, konstant bleibt im Steady state, folgt

$$g_Y = \alpha g_{D_Y}. \quad (7.27)$$

Wachstum in dieser Ökonomie entsteht allein dadurch, dass der aggregierte Kapital-Qualitäts-Index wächst. Diese Wachstumsrate beträgt<sup>34</sup>

$$g_{D_Y} = I \ln \lambda + g_Y. \quad (7.28)$$

Einsetzen in (7.27) und Umformen ergibt eine Gleichung für die Wachstumsrate des Inlandsprodukts in Abhängigkeit von  $I$ :

$$g_Y = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I \ln \lambda. \quad (7.29)$$

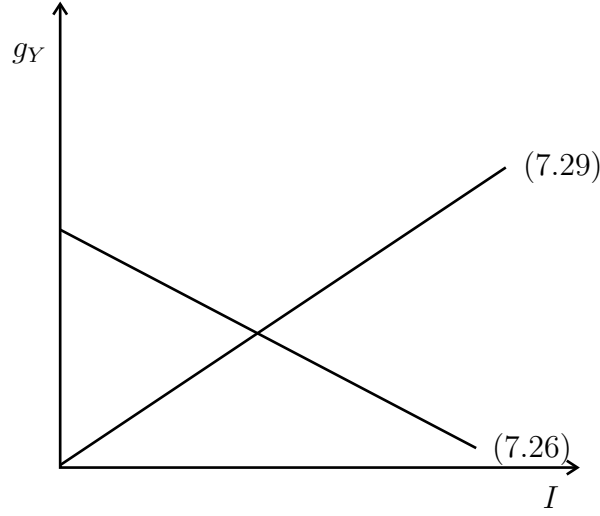
Gleichungen (7.26) und (7.29) legen die gleichgewichtige Forschungsintensität und die gleichgewichtige Wachstumsrate fest. Hierbei ist allerdings noch zu unterscheiden, welche Werte  $\sigma$  annimmt. Außerdem muss noch sichergestellt werden, dass auch die Transversalitätsbedingung (7.24) erfüllt ist.

Ist  $\sigma > 1$ , dann ist die Steigung von Gleichung (7.26) im  $g_Y$ - $I$ -Diagramm negativ. Gleichung (7.29) ist eine Ursprungsgerade mit positiver Steigung. Um eine positive Forschungsintensität mit Wachstum in der Ökonomie zu haben, muss also der Ordinatenabschnitt von (7.26) positiv sein (Abbildung (7.3)):

---

<sup>33</sup>Siehe Anhang.

<sup>34</sup>Die Herleitung ist im Anhang.

Abbildung 7.3: Steady state, wenn  $\sigma > 1$ 

$$\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{(1 - \alpha) a} - \rho > 0$$

bzw.  $\phi \equiv \frac{\rho a}{L} < \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1 - \alpha)}.$  (7.30)

$\phi$  darf also nicht zu groß sein, damit ein Steady state existiert. Das bedeutet, dass die Bevölkerungsgröße und die Produktivität im Forschungssektor nicht zu niedrig sein dürfen und der Diskontfaktor künftigen Nutzens nicht zu hoch. Die Transversalitätsbedingung (7.24) ist für  $\sigma > 1$  immer erfüllt.<sup>35</sup>

Wenn  $\sigma$  kleiner als eins ist, dann ist der Koeffizient  $1/(\sigma - 1)$  in (7.26) negativ und die Steigung somit positiv. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, bei denen die Ökonomie mit positiver Forschungsintensität wächst:

1. Der Ordinatenabschnitt von (7.26) ist positiv. Dann muss die Steigung von (7.26) kleiner sein als die von (7.29), um einen Schnittpunkt beider Geraden zu erhalten (siehe Abbildung 7.4, linke Grafik). Ein positiver Ordinatenabschnitt bedeutet

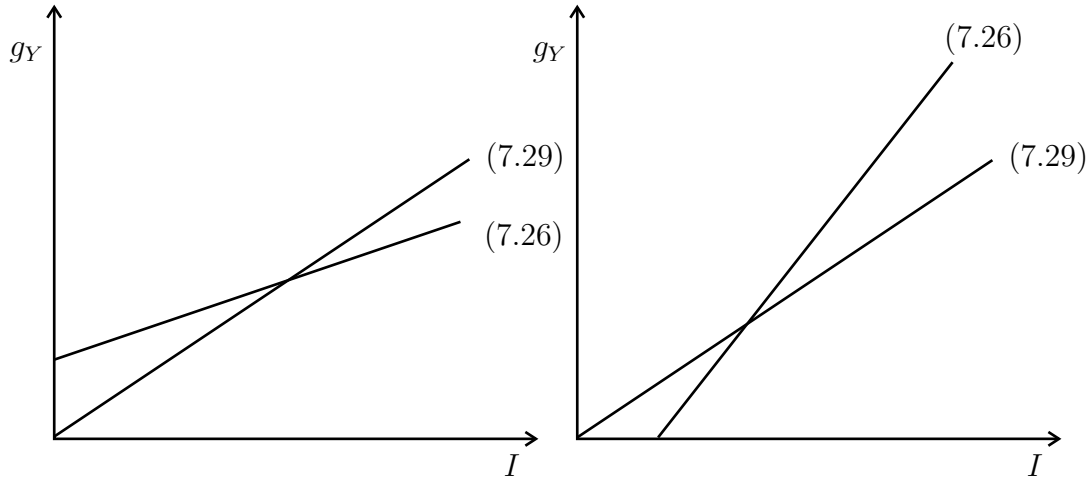
$$\phi > \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1 - \alpha)}. \quad (7.31)$$

Für die Steigung muss gelten

$$\frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{(1 - \alpha)(1 - \sigma)} < \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha}.$$

<sup>35</sup>Ein Beweis findet sich im Anhang.



Abbildung 7.4: Steady states wenn  $\sigma < 1$ 

Nach  $\sigma$  auflösen ergibt

$$\sigma < 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \equiv \bar{\sigma}. \quad (7.32)$$

Trägt man  $\phi$  gegen  $\sigma$  in einer Grafik an, dann lassen sich die nicht zulässigen Parameterbereiche aus (7.31) und (7.32) identifizieren. Wenn  $\sigma$  kleiner als  $\bar{\sigma}$  ist, dann sind gemäß (7.31) nur größere Werte als  $\alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha)$  für  $\phi$  zulässig. Ansonsten würde kein Steady state existieren. In Abbildung 7.5 ist also in dieser Konstellation nur der Bereich links von  $\bar{\sigma}$  und oberhalb von  $\alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha)$  zulässig.

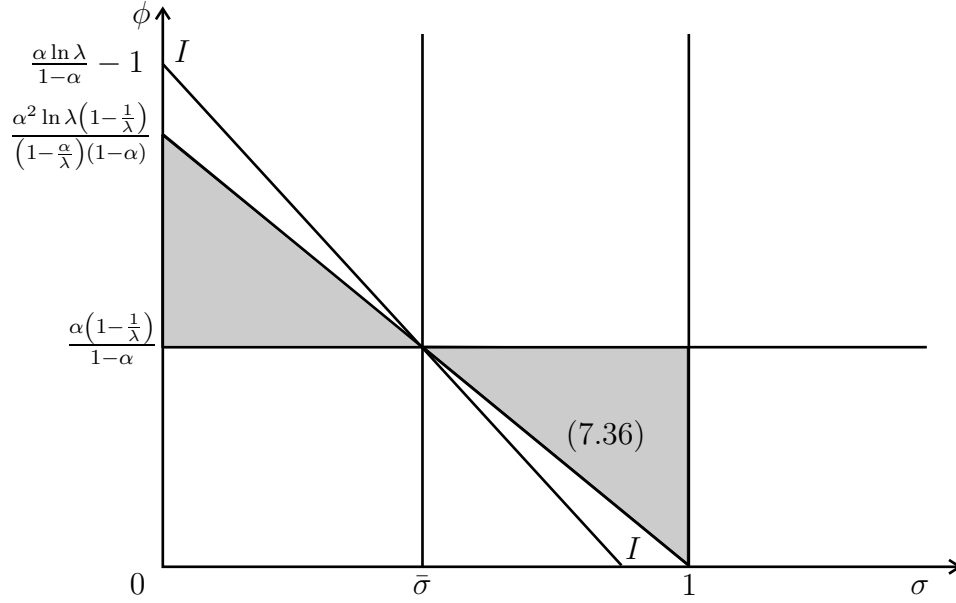
2. Der Ordinatenabschnitt von (7.26) ist negativ. Dann muss die Steigung von (7.26) größer sein als die von (7.29), um einen Schnittpunkt beider Geraden zu erhalten (siehe Abbildung 7.4, rechte Grafik). Ein negativer Ordinatenabschnitt bedeutet

$$\phi < \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}{(1 - \alpha)}. \quad (7.33)$$

Für die Steigungen ergibt sich nach etlichen Umformungen

$$\sigma > 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \equiv \bar{\sigma}. \quad (7.34)$$

Hier ist also nur der Bereich rechts von  $\bar{\sigma}$  und unterhalb von  $\alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha)$  relevant für ein Steady state.

Abbildung 7.5: Zulässige Parameterbereiche, wenn  $\bar{\sigma} > 0$ 

Angenommen, die Bedingungen (7.31) und (7.32) bzw. (7.33) und (7.34) seien erfüllt. Dann lässt sich aus den beiden Gleichungen (7.25) und (7.29) die gleichgewichtige Wachstumsrate des Inlandsproduktes berechnen. Einsetzen von (7.25) in (7.29) liefert<sup>36</sup>

$$g_Y = \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right]. \quad (7.35)$$

Es ist allerdings noch zu überprüfen, ob auch die Transversalitätsbedingung (7.24) erfüllt ist. Einsetzen von (7.35) in (7.24) ergibt nach einigen Umformungen<sup>37</sup> einen weiteren Zusammenhang in  $\phi$  und  $\sigma$ :

$$\phi(\sigma) \equiv \frac{\alpha^2(1 - \sigma) \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1 - \alpha)} \begin{cases} < \phi & \text{für } \sigma > \bar{\sigma} \\ > \phi & \text{für } \sigma < \bar{\sigma} \end{cases}. \quad (7.36)$$

Die linke Seite von Bedingung (7.36) ist eine in  $\sigma$  linear (fallende) Funktion und wird bei  $\sigma = 1$  null. In Abbildung 7.5 erfüllen im Intervall  $(\bar{\sigma}; 1]$  nur Werte oberhalb dieser Geraden die Transversalitätsbedingung. Im Intervall  $(0; \bar{\sigma})$  sind nur Werte unter der Geraden zulässig. Außerdem ist ihr Wert bei

<sup>36</sup>Herleitung siehe Anhang.

<sup>37</sup>Siehe Anhang.

$\bar{\sigma}$  gleich  $\alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha)$ . Alle drei Geraden haben also einen gemeinsamen Schnittpunkt bei  $(\bar{\sigma}; \alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha))$ . Die Werte oberhalb dieser Geraden für  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$  bzw. unterhalb davon für  $\bar{\sigma} < \sigma \leq 1$  sind somit auch noch auszuschließen, so dass für  $\sigma < 1$  nur die grauen Bereiche in Abbildung 7.5 übrig bleiben. Für Parameterkonstellationen in diesen Bereichen ist sowohl die Transversalitätsbedingung als auch die Bedingung für die Existenz eines Steady states erfüllt.

Im Bereich unterhalb von  $\phi(\sigma)$  für  $\bar{\sigma} < \sigma < 1$  würde in Forschung investiert und eine positive Wachstumsrate folgen. Allerdings wäre diese so hoch, weil Forschung so produktiv ( $1/a$  hoch), die Ökonomie so groß ( $L$  groß) oder die Konsumenten so geduldig sind ( $\rho$  niedrig), dass der Nutzen  $U(0)$  für die Konsumenten unendlich groß und die Transversalitätsbedingung verletzt wäre. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass im Bereich  $(0, \bar{\sigma})$  die komparative Statik des Modells „verdreht“ ist. Eine größere Bevölkerung mindert die Wachstumsrate. Entsprechend gilt für den Bereich oberhalb von  $\phi(\sigma)$  für  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ , dass die Wachstumsrate dort so hoch wäre, dass die Transversalitätsbedingung verletzt wäre. Diese Region muss auch ausgeschlossen werden.

Oberhalb der horizontalen Geraden im Intervall  $(\bar{\sigma}; 1]$  würde sich Forschung nicht lohnen, weil die Konsumenten zu ungeduldig, Forschung zu unproduktiv oder die Ökonomie zu klein wäre. Stagnation wäre die Folge. Im Intervall  $(0; \bar{\sigma})$  würde das Gleiche wieder unterhalb dieser Geraden gelten.

Eine letzte Restriktion wird durch die Höhe des Arbeitsangebots auferlegt. Für Forschung kann maximal die gesamte Bevölkerung eingesetzt werden,  $I \leq L/a$ . Für die gleichgewichtige Wachstumsrate folgt damit eine Obergrenze. In Abbildung 7.5 wird diese Bedingung durch die Gerade  $II$  mit Ordinatenabschnitt  $\alpha \ln \lambda / (1 - \alpha) - 1$  dargestellt.<sup>38</sup> Für  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$  sind nur Werte unterhalb, für  $\bar{\sigma} < \sigma$  nur Werte oberhalb der Geraden zulässig. Die Transversalitätsbedingung ist damit stärker und impliziert die Restriktion durch die Bevölkerungsgröße.

Ist  $\sigma$  größer als eins, dann ist die Transversalitätsbedingung immer erfüllt. Es ist also nur die Restriktion aus (7.30) zu beachten. In Abbildung 7.5 ist deshalb für  $\sigma > 1$  wieder nur der graue Bereich zulässig.

Zur Vollständigkeit muss der Fall  $\sigma = \bar{\sigma}$  noch ausgeschlossen werden. Dies würde nämlich bedeuten, dass die Geraden (7.26) und (7.29) parallel verlaufen. Eine eindeutige Lösung der beiden Gleichungen gibt es in diesem Fall nicht.

---

<sup>38</sup>Eine Herleitung der Geraden ist im Anhang.

Gilt  $\sigma = 1$ , dann bestimmt sich die Forschungsintensität mit (7.25) alleine:

$$I = \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \frac{L}{a} - \frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \rho.$$

Im  $g_Y$ - $I$ -Diagramm wäre Gleichung (7.25) eine vertikale Gerade. Einsetzen in (7.29) ergibt die Wachstumsrate

$$g_Y = \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \left[ \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right].$$

### 7.3.5 Komparative Statik

Zum Abschluss der Gleichgewichtsanalyse des Modells wird noch seine komparative Statik überprüft.<sup>39</sup> Wenn  $\sigma > 1$  ist, dann ist der Bruch vor Gleichung (7.35) eindeutig positiv. Damit sinkt die Wachstumsrate  $g_Y$  mit steigendem Diskontierungsfaktor  $\rho$  und steigendem  $\sigma$  und steigt mit der Größe der Bevölkerung  $L$  und mit der Forschungsproduktivität  $1/a$ . Außerdem steigt sie mit der Höhe der Qualitätsstufen  $\lambda$ . Dies wird weiter unten noch bewiesen.

Ist  $\sigma$  kleiner als eins, dann muss  $[1 - \alpha/\lambda + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda] > 0$  sein, damit obige Eigenschaften erhalten bleiben. Dies bedeutet

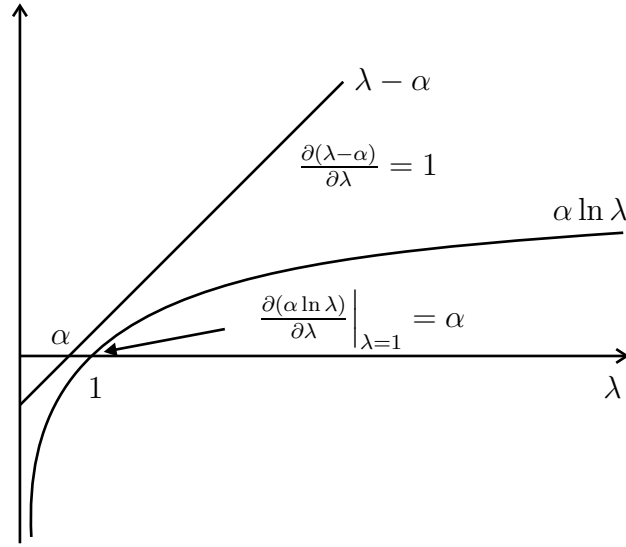
$$\sigma > 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \equiv \bar{\sigma}.$$

In Abbildung 7.5 hat der Bereich zwischen  $\bar{\sigma}$  und 1 also auch eine „normale“ komparative Statik. In Abbildung 7.4 entspricht dieser Fall der rechten Grafik. Erhöht sich beispielsweise die Produktivität im Forschungssektor oder nimmt die Bevölkerungsgröße zu, dann verschiebt sich die Gerade (7.26) nach unten und die Ökonomie wächst schneller. Gleiches gilt für eine Abnahme des Diskontierungsfaktors  $\rho$ . Weiter unten wird gezeigt, dass auch eine Erhöhung der Qualitätsstufen schnelleres Wachstum bewirkt.

Im umgekehrten Fall, wenn also  $\sigma$  kleiner als eins und kleiner als  $\bar{\sigma}$  ist, ergibt sich eine „anormale“ komparative Statik. Dieser Fall entspricht dem linken Abschnitt in Abbildung 7.5 bzw. der linken Grafik in Abbildung 7.4. Ein größerer Term  $L/a$  bzw. ein kleineres  $\rho$  verschieben die Gerade wieder nach unten. Diesmal nimmt die Wachstumsrate aber ab! Auch höhere Qualitätsstufen mindern jetzt

---

<sup>39</sup>Im nächsten Kapitel wird die komparative Statik des Modells genauer analysiert und die zugrunde liegenden Effekte werden herausgearbeitet.

Abbildung 7.6:  $\lambda - \alpha > \alpha \ln \lambda$  für  $0 < \alpha < 1$ 

die Wachstumsrate. Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Die gleichgewichtige Wachstumsrate von  $g_Y$  lässt sich darstellen als

$$g_Y = \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right], \quad (7.37)$$

wobei  $\bar{\sigma}$  von  $\lambda$  abhängig ist. Die partielle Ableitung von  $\bar{\sigma}$  nach  $\lambda$  lautet

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda^2} \frac{\alpha \ln \lambda - (\lambda - \alpha)}{(\alpha \ln \lambda)^2} > 0.$$

Sie ist größer null, weil  $\alpha \ln \lambda - (\lambda - \alpha)$  negativ ist, wenn  $\lambda > 1$  und  $0 < \alpha < 1$  (siehe Abbildung 7.6).

Die partielle Ableitung von  $g_Y$  nach  $\lambda$  ist

$$\frac{\partial g_Y}{\partial \lambda} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\lambda^2} \frac{L}{a} (\sigma - \bar{\sigma}) + \bar{\sigma}_\lambda \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right]}{(\sigma - \bar{\sigma})^2},$$

wobei  $\bar{\sigma}_\lambda = \partial \bar{\sigma} / \partial \lambda$ . Nun ist es einfach zu sehen, wie eine Änderung der Qualitätsstufen-Höhe auf die gleichgewichtige Wachstumsrate  $g_Y$  wirkt. Gemäß (7.31) und (7.32) bzw. (7.33) und (7.34) haben  $(\sigma - \bar{\sigma})$  und der Ausdruck in der eckigen Klammer immer das gleiche Vorzeichen. Weil der Nenner positiv ist, folgt

$$\frac{\partial g_Y}{\partial \lambda} \begin{cases} < 0 & \text{für } \sigma < \bar{\sigma} \\ > 0 & \text{für } \sigma > \bar{\sigma} \end{cases}.$$

Höhere Qualitätsstufen erhöhen  $g_Y$ , wenn  $\sigma > \bar{\sigma}$  ist, und mindern sie für  $\sigma < \bar{\sigma}$ .

Eine höhere Forschungsproduktivität, ein größeres Arbeitskräftepotential, eine niedrigere Diskontrate und größere Qualitätsstufen mindern die Wachstumsrate, wenn  $\sigma < \bar{\sigma}$ .<sup>40</sup> Diese „verdrehte“ komparative Statik kommt interessanterweise weder im Romer-Modell noch im GH-Modell vor. Im GH-Modell beträgt die Wachstumsrate (ohne die Annahme logarithmischen Nutzens):  $g_Y = \ln \lambda [(\lambda - 1)L/a - \rho] / [(\sigma - 1) \ln \lambda + \lambda]$ . Die komparative Statik ist für positive  $\sigma$  immer „normal“, weil der Nenner positiv ist.

## 7.4 Wohlfahrt

Schließlich ist noch zu ermitteln, ob die durch das Marktgleichgewicht erreichte Ressourcenallokation nutzenmaximierend ist. Im Romer-Modell ist die gleichgewichtige Wachstumsrate immer zu niedrig, im Modell von Grossman/Helpman kann sie sowohl zu niedrig als auch zu hoch sein.<sup>41</sup>

Dazu wird die Wachstumsrate berechnet, die resultieren würde, wenn ein wohlwollender sozialer Planer die Ressourcen der Ökonomie nach Belieben aufteilen könnte: das Endprodukt zwischen Konsum und Kapitalakkumulation und die verfügbare Arbeit zwischen dem Forschungs- und dem Endproduktsektor. Die Zielfunktion ist weiterhin Nutzenmaximierung. Die Kontrollvariablen des sozialen Planers sind der Konsum und die Forschungsintensität.

Die Produktionsfunktion aus (7.1) kann auch als

$$Y = (L - \underbrace{aI}_{=L_A})^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \underbrace{\left\{ \exp \left[ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj \right] \right\}^\alpha}_{\equiv \Delta} = (L - aI)^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \Delta^\alpha \quad (7.38)$$

<sup>40</sup>Im nächsten Kapitel und in Arnold & Kornprobst (2006) und Arnold & Kornprobst (2007) wird gezeigt, dass in diesem Bereich die Modelldynamik entweder instabil oder indeterminiert sein kann. Stabile Steady states mit dieser „anormalen“ komparativen Statik existieren deshalb.

<sup>41</sup>In einer Verallgemeinerung des Romer-Modells kann das Marktsystem allerdings auch eine zu hohe Wachstumsrate hervorbringen (Benassy 1998).

geschrieben werden. Dies folgt aus zwei Beobachtungen: 1.  $L_Y$  kann durch  $L - aI$  ersetzt werden. 2. Weil für die Herstellung der Kapitalgüter die gleiche Technologie gilt, wäre es nicht optimal, niedrigere Qualitätsstufen als die höchstmögliche aus einer Produktlinie einzusetzen. Außerdem wird das verfügbare Kapital wegen fallender Grenzproduktivitäten zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig auf alle Produktlinien verteilt, so dass  $x(j) = x$  wie im Marktgleichgewicht gilt. Der Kapitalstock ergibt sich als  $K = x\eta$ . Somit folgt:  $x = K/\eta$ . Durch Einsetzen und geeignete Umformungen erhält man (7.38).<sup>42</sup>

Als erste Restriktion erhält man mithin

$$\dot{K} = Y - Lc = (L - aI)^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \Delta^\alpha - Lc.$$

Mit Gleichung (7.10) hat man eine zweite Restriktion:

$$\dot{\Delta} = \Delta I \ln \lambda.$$

Aufstellen der Hamiltonfunktion ergibt

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} L \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \zeta_1 \left[ (L - aI)^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \Delta^\alpha - Lc \right] + \zeta_2 \Delta I \ln \lambda.$$

Als notwendige Bedingungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} &= e^{-\rho t} c^{-\sigma} - \zeta_1 = 0 \quad \text{bzw.} \\ \zeta_1 &= e^{-\rho t} c^{-\sigma}; \end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} &= \zeta_1 (-a)(1 - \alpha)(L - aI)^{-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \Delta^\alpha + \zeta_2 \Delta \ln \lambda = 0 \quad \text{bzw.} \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2} &= \frac{(L - aI)\Delta \ln \lambda}{a(1 - \alpha)Y}; \end{aligned} \tag{7.40}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} &= \zeta_1 (L - aI)^{1-\alpha} \frac{1}{\eta^\alpha} \alpha K^{\alpha-1} \Delta^\alpha = -\dot{\zeta}_1 \quad \text{bzw.} \\ \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} &= -\frac{\alpha Y}{K}; \end{aligned} \tag{7.41}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Delta} = \zeta_1 (L - aI)^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \alpha \Delta^{\alpha-1} + \zeta_2 I \ln \lambda = -\dot{\zeta}_2 \quad \text{bzw.}$$

---

<sup>42</sup>Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang.

$$\frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} = -\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda. \quad (7.42)$$

Auf einem gleichgewichtigen Wachstumspfad muss  $\zeta_2$  definitionsgemäß mit konstanter Rate wachsen. Weil  $I$  und  $\ln \lambda$  konstant sind, muss der mittlere Term in der letzten Gleichung auch konstant sein. Es folgt  $\dot{\zeta}_1/\zeta_1 = \dot{\zeta}_2/\zeta_2 - g_Y + g_\Delta$ . Aus (7.41) folgt:  $g_Y = g_K$ . Mit (7.38) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen  $Y$  und  $\Delta$ :

$$g_\Delta = \frac{1 - \alpha}{\alpha} g_Y. \quad (7.43)$$

Zusammen:

$$\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} = \frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} - \frac{2\alpha - 1}{\alpha} g_Y. \quad (7.44)$$

Leitet man Gleichung (7.39) nach der Zeit ab und teilt durch  $\zeta_1$ , dann erhält man mit  $\dot{c}/c = \dot{Y}/Y$  eine Gleichung in  $\dot{\zeta}_1/\zeta_1$  und  $g_Y$ :

$$\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} = -\rho - \sigma g_Y. \quad (7.45)$$

Gleichsetzen der letzten beiden Gleichungen, Auflösen nach  $\dot{\zeta}_2/\zeta_2$  und Gleichsetzen mit (7.42) liefert

$$\frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} = \left( \frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma \right) g_Y - \rho = -\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda. \quad (7.46)$$

Setzt man (7.40) in die letzte Gleichung ein und eliminiert  $I$  durch (7.29), dann erhält man schließlich nach geeigneten Umformungen<sup>43</sup> einen Ausdruck für die Wachstumsrate im Optimum<sup>44</sup>

$$g_Y^* = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \frac{L}{a} - \rho \right). \quad (7.47)$$

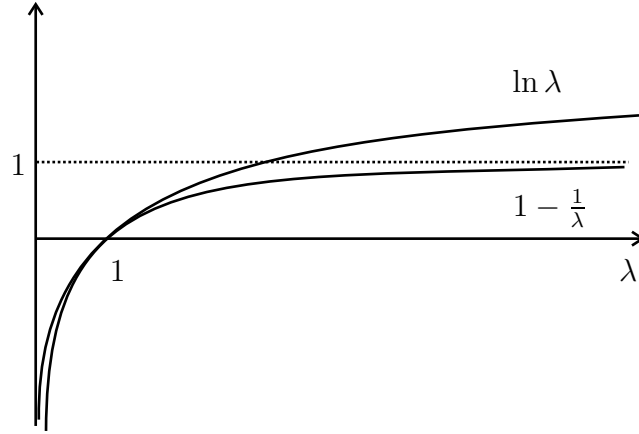
Diese Wachstumsrate unterscheidet sich von der gleichgewichtigen Wachstumsrate des Marktsystems aus Gleichung (7.35). Die Gründe dafür liegen in

---

<sup>43</sup>Siehe Anhang.

<sup>44</sup>Es wird unterstellt, dass gilt  $\phi < \alpha \ln \lambda / (1 - \alpha)$ . Für alle zulässigen Parameterbereiche für  $g_Y$  ist diese Bedingung erfüllt (siehe Abbildung 7.5). Wäre  $\phi > \alpha \ln \lambda / (1 - \alpha)$ , dann wäre es das Beste, keine Arbeit in Forschung einzusetzen. Die Wachstumsrate im Optimum wäre dann null.



Abbildung 7.7:  $\ln \lambda > 1 - 1/\lambda$  für  $\lambda > 1$ 

den externen Effekten, die sich nicht in privaten Anreizen für Forschung niederschlagen. Weil genau diese Anreize die Wachstumsrate der dezentralen Marktwirtschaft bestimmen, muss diese nicht identisch sein mit der Wachstumsrate im Optimum.

Es gibt einen positiven „consumer-surplus“-Effekt: Die Profite für die Zwischenprodukthersteller, die die Anreize für Forschung darstellen, sind geringer als die Wohlfahrtsgewinne für die Konsumenten. Außerdem gibt es einen weiteren positiven Effekt durch Wissens-Spillover. Macht eine Firma eine Innovation, dann wird das darin enthaltene technische Wissen für alle anderen Firmen ersichtlich und Basis für ihre eigenen Forschungsanstrengungen („knowledge-spillover effect“). Beide Effekte wirken auf eine zu niedrige Wachstumsrate des Marktsystems hin. Allerdings geht von den Innovationen auch noch ein dritter, negativer Effekt aus. Wenn einer Firma eine Innovation gelingt, dann eignet sie sich den ganzen Gewinnstrom aus dem Produkt an, auf Kosten des bisherigen Marktführers. Diese Gewinnverlagerung ist mit keinen gesellschaftlichen Wohlfahrtsgewinnen verbunden und stellt einen übermäßigen Anreiz für Innovationen dar („business-stealing effect“).

Es überwiegen aber die beiden erstgenannten Effekte den dritten. Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist zu niedrig. Für  $\bar{\sigma} < 0$  ist das wie folgt einfach zu sehen.  $g_Y^* > g_Y$  kann durch Umformen und Einsetzen der Gleichungen (7.35) und (7.47) geschrieben werden als<sup>45</sup>

---

<sup>45</sup>Herleitung siehe Anhang.

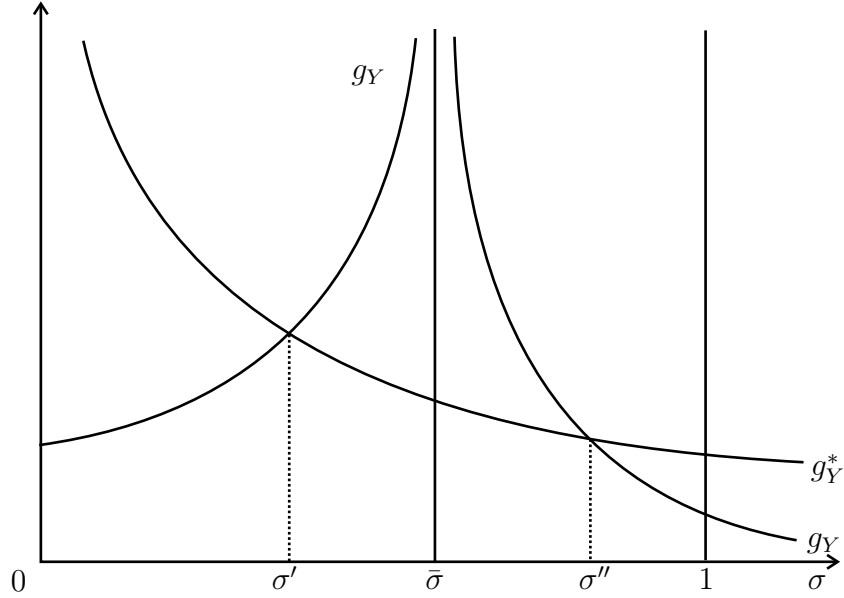


Abbildung 7.8: Wachstumsraten

$$\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} - \phi > \frac{\sigma}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \phi \right]. \quad (7.48)$$

Abbildung 7.7 verdeutlicht, dass  $\ln \lambda > 1 - 1/\lambda$  für  $\lambda > 1$ . Damit folgt  $\alpha \ln \lambda / (1 - \alpha) - \phi > \alpha (1 - 1/\lambda) / (1 - \alpha) - \phi$ . (7.48) wird also impliziert von:

$$\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \phi > \frac{\sigma}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \phi \right].$$

Weil der Ausdruck in eckigen Klammern wegen (7.33) positiv ist, ist diese Bedingung äquivalent zu  $\bar{\sigma} < 0$ . Dies ist eben hier erfüllt. Ungleichungen (7.48) und  $g_Y^* > g_Y$  sind richtig. Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist für  $\bar{\sigma} < 0$  also immer zu niedrig.

Für den Fall  $\bar{\sigma} > 0$  ist  $g_Y$  eine unstetige Funktion in  $\sigma$  bei  $\sigma = \bar{\sigma}$ . Es sind somit zwei Bereiche für  $\sigma$  zu unterscheiden, in denen die Wachstumsraten verglichen werden müssen. Dazu wird als Erstes der Verlauf von  $g_Y$  und  $g_Y^*$  als Funktion von  $\sigma$  untersucht. Danach wird gezeigt, dass Bereiche, in denen  $g_Y > g_Y^*$  wäre, immer ausgeschlossen werden können, weil sie in den unzulässigen Parameterbereichen liegen.

Im Bereich  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$  ist (7.35) eine monoton steigende und (7.47) eine monoton fallende Funktion in  $\sigma$ . Wenn  $\sigma$  gegen null geht, gilt für  $g_Y^*$  offensichtlich:  $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} g_Y^* = \infty$ .  $g_Y$  nimmt einen endlichen Wert an:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} g_Y = \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right]} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{(1 - \alpha) a} - \rho \right].$$

Für  $\sigma \rightarrow 0$  wäre also die Wachstumsrate im Optimum größer als die gleichgewichtige Wachstumsrate.

$g_Y^*$  an der Stelle  $\sigma = \bar{\sigma}$  nimmt einen endlichen Wert an:

$$g_Y^* = \frac{\alpha \ln \lambda}{\alpha \ln \lambda - 1 + \frac{\alpha}{\lambda}} \left( \frac{\alpha \ln \lambda L}{1 - \alpha a} - \rho \right).$$

Dagegen geht  $g_Y$  für  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  gegen unendlich. Das wird folgendermaßen ersichtlich: Gemäß (7.37) lautet  $g_Y$ :

$$g_Y = \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{1 - \alpha} \frac{L}{a} - \rho \right].$$

Ist  $\sigma < \bar{\sigma}$ , dann ist wegen (7.31) der Ausdruck in eckigen Klammern negativ. Geht  $\sigma$  von unten gegen  $\bar{\sigma}$ , dann strebt  $g_Y$  gegen unendlich. Für  $\sigma > \bar{\sigma}$  muss gemäß (7.33) der Klammerausdruck positiv sein, so dass auch hier  $g_Y$  gegen unendlich geht, wenn  $\sigma$  sich von oben  $\bar{\sigma}$  annähert. Abbildung 7.8 zeigt die Abschnitte von  $g_Y(\sigma)$  mit positiven Funktionswerten. Für den linken Ast gilt Bedingung (7.31), für den rechten Bedingung (7.33).

Im Bereich  $\sigma > \bar{\sigma}$  fallen beide Funktionen in  $\sigma$ .  $g_Y$  fällt aber stärker, so dass sich beide Funktionen im Bereich  $\bar{\sigma} < \sigma < 1$  schneiden. Für  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  (von oben) ist, wie gezeigt,  $g_Y > g_Y^*$ . Bei  $\sigma = 1$  gilt aber schon das Umgekehrte,  $g_Y < g_Y^*$ : (7.48) mit  $\sigma = 1$  ergibt

$$\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} - \phi > \frac{1}{1 - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \phi \right].$$

Umformen liefert die äquivalente Bedingung<sup>46</sup>

$$\frac{1}{1 - \bar{\sigma}} > \phi \frac{-\bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}}, \quad (7.49)$$

---

<sup>46</sup>Siehe Anhang.

welche erfüllt ist, weil hier  $\bar{\sigma} > 0$  und  $\bar{\sigma} < 1$  immer gilt.<sup>47</sup>

Wenn  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$  und  $\alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha) < \phi$  gilt, dann gibt es genau einen Schnittpunkt,  $\sigma'$ , von  $g_Y^*(\sigma)$  und  $g_Y(\sigma)$ . Für  $\bar{\sigma} < \sigma < 1$  und  $\alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha) > \phi$  gibt es auch genau einen Schnittpunkt der Funktionen, der mit  $\sigma''$  abgekürzt wird (siehe Abbildung 7.8). Dass es jeweils genau einen Schnittpunkt gibt, folgt aus den Krümmungen der Funktionen. Für  $\sigma > 0$  und  $(\alpha \ln \lambda)/(1 - \alpha) > \phi$  folgt<sup>48</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_Y^*}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\alpha \ln \lambda L}{1 - \alpha} \frac{1}{a} - \rho \right) < 0 \quad \text{für } \sigma > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} > \phi \\ \frac{\partial^2 g_Y^*}{\partial \sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^3} \left( \frac{\alpha \ln \lambda L}{1 - \alpha} \frac{1}{a} - \rho \right) > 0 \quad \text{für } \sigma > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} > \phi.\end{aligned}$$

$g_Y^*$  ist eine streng konvex fallende Funktion in  $\sigma$ . Für  $g_Y$  gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_Y}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{(\sigma - \bar{\sigma})^2} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{1 - \alpha} \frac{1}{a} - \rho \right] \begin{cases} > 0 & \text{für (7.31), (7.32)} \\ < 0 & \text{für (7.33), (7.34)} \end{cases} \\ \frac{\partial^2 g_Y}{\partial \sigma^2} &= \frac{2}{(\sigma - \bar{\sigma})^3} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{1 - \alpha} \frac{1}{a} - \rho \right] \begin{cases} > 0 & \text{für (7.31), (7.32)} \\ > 0 & \text{für (7.33), (7.34)} \end{cases}.\end{aligned}$$

Im Bereich  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$  ist  $g_Y(\sigma)$  somit streng konvex steigend, für  $\sigma > \bar{\sigma}$  streng konvex fallend. Zusammengenommen folgt, dass sich beide Funktionen  $g_Y^*(\sigma)$  und  $g_Y(\sigma)$  in den Bereichen  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$  und  $\sigma > \bar{\sigma}$  jeweils genau einmal schneiden.

Der entsprechende Wert für  $\sigma'$  (wenn (7.31) gilt) bzw.  $\sigma''$  (wenn (7.33) gilt) wird im Anhang berechnet und lautet

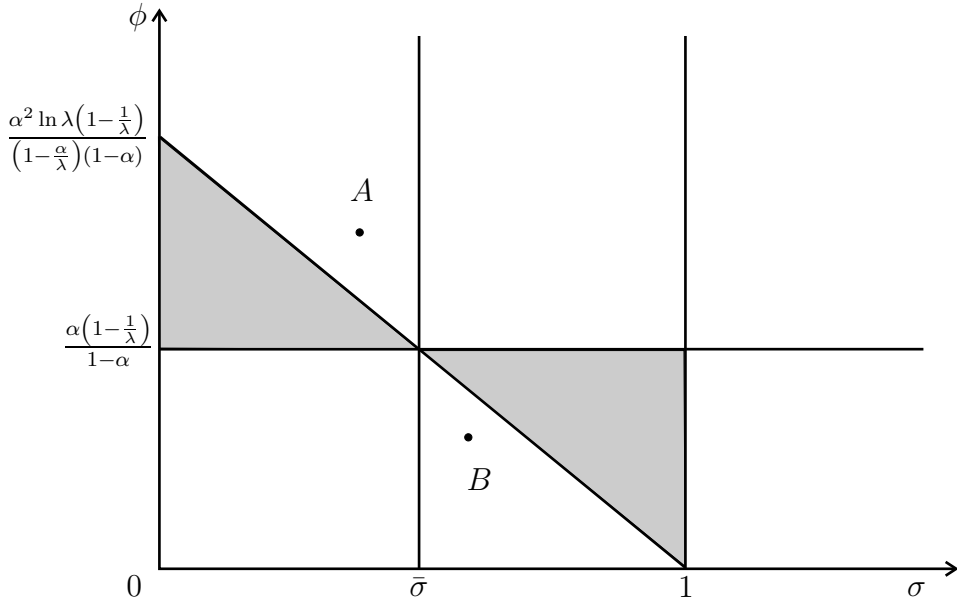
$$\sigma_{|g_Y=g_Y^*} = \left( \phi \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1 \right) \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda}{\alpha (\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda})}$$

In diesem Schnittpunkt wird, gegeben die Parameter  $\alpha$  und  $\lambda$ , dem  $\sigma$  ein eindeutiges  $\phi$  zugeordnet. Rechts von  $\sigma'$  wäre die gleichgewichtige Wachstumsrate höher als die im Optimum. Nun lässt sich aber zeigen, dass schon bei  $\sigma'$  die Transversalitätsbedingung (7.36) und die Bedingung für die Existenz eines Steady states (7.31) nicht miteinander vereinbar sind. Bedingung (7.36) verlangt für  $\sigma'$ <sup>49</sup>

<sup>47</sup>Weil  $1 - \alpha/\lambda > 0$  und  $\alpha \ln \lambda > 0$  für  $0 < \alpha < 1$  und  $\lambda > 1$  muss gelten:  $\bar{\sigma} = 1 - (1 - \alpha/\lambda)/(\alpha \ln \lambda) < 1$ .

<sup>48</sup>Die letztgenannte Bedingung ist für alle zulässigen Parameterbereiche für  $g_Y$  erfüllt – siehe Abbildung 7.5.

<sup>49</sup>Herleitung siehe Anhang.

Abbildung 7.9: Parameterwerte für  $g_Y^* = g_Y$ 

$$\phi < \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha}.$$

Die Bedingung für Existenz eines Steady states (7.31) verlangt aber genau das Gegenteil! Beide Bedingungen widersprechen sich. Parameterkonstellationen, in denen die gleichgewichtige Wachstumsrate und die im Optimum gleich wären, liegen außerhalb des zulässigen Bereichs. In der Abbildung für die zulässigen Bereiche impliziert ein Gleichsetzen von  $g_Y^*$  mit  $g_Y(> 0)$ , dass die Existenzbedingung für einen Steady state erfüllt ist. In Abbildung 7.9 ist man also für  $\sigma < \bar{\sigma}$  oberhalb der horizontalen Geraden  $\phi = (\alpha - 1/\lambda)/(1 - \alpha)$ .  $\sigma'$  legt dann  $\phi$  so fest, dass die Transversalitätsbedingung verletzt ist, wie oben gezeigt wurde.  $\sigma'$  würde damit in einem Punkt  $A$  oberhalb von  $\phi(\sigma)$  liegen und damit außerhalb des zulässigen Bereichs. Außerdem wird – wie man in Abbildung 7.9 leicht erkennen kann – die Transversalitätsbedingung mit steigendem  $\sigma$  noch strenger, so dass rechts von  $\sigma'$  eine der beiden Bedingungen mit Sicherheit immer verletzt ist. Also gilt auch im Bereich  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ , dass die Wachstumsrate im Optimum größer ist als die gleichgewichtige Wachstumsrate.

Für  $\bar{\sigma} < \sigma < 1$  folgt ebenso, dass die Transversalitätsbedingung und die Bedingung für die Existenz eines Steady states nicht gleichzeitig erfüllt sein können.

Analog zu oben verlangt (7.36) für  $\sigma''$

$$\phi > \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})}{1 - \alpha}.$$

Bedingung (7.33) verlangt aber wieder genau das Gegenteil. In Abbildung 7.9 bedeutet Existenz eines Steady states bei Verletzung der Transversalitätsbedingung, dass  $\sigma''$  einen Punkt unterhalb von  $\phi(\sigma)$  festlegt, z.B. Punkt  $B$ . Mit fallendem  $\sigma$  wird die Transversalitätsbedingung noch strenger, so dass wiederum eine der beiden Bedingungen mit Sicherheit verletzt ist. Somit gilt:  $g_Y^* > g_Y$  für  $\bar{\sigma} < \sigma < 1$ . Auch für  $\sigma > 1$  ist  $g_Y^*$  immer größer als  $g_Y$ . Für  $\sigma = 1$  wurde das bereits gezeigt. Weil beide Funktionen,  $g_Y^*(\sigma)$  und  $g_Y(\sigma)$  für  $\sigma > \bar{\sigma}$  konvex fallend verlaufen, folgt, dass  $g_Y^* > g_Y$  für  $\sigma > 1$  immer gilt.

Zusammengenommen folgt

$$g_Y^* > g_Y \quad \text{für} \quad \sigma > 0.$$

Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist immer zu niedrig, weil die positiven externen Effekte den negativen Effekt überwiegen.

## 7.5 Semi-endogenes Wachstum

In diesem Kapitel wurde das Romer-Modell mit Wachstum durch Qualitätsverbesserungen vorgestellt. Wie das ursprüngliche Modell von Romer (1990a) und das Qualitäten-Modell von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) weist es Skaleneffekte auf. Die Jones-Kritik, dass Modelle dieser Art nicht konsistent sind mit den empirischen Fakten (siehe Abschnitt 2.3), trifft auch auf das Romer-Qualitäten-Modell zu. In diesem Abschnitt und in Kapitel 9 werden zwei Auswege aufgezeigt, wie man semi-endogenes Wachstum im Romer-Qualitäten-Modell erzeugen kann.

Die erste Möglichkeit modifiziert – ähnlich wie in Segerstrom (1998) – die Forschungstechnologie und gibt die Annahme von linearen intertemporalen Wissens-Spillovern auf. Diese Modifikation wird in diesem Abschnitt vorgestellt.

Die zweite Möglichkeit erweitert und modifiziert das Modell, indem ein zusätzlicher Forschungssektor eingeführt wird, in dem neue Produktlinien erfunden werden können. Ist das Modell aus diesem Abschnitt eine Variante des ursprünglichen Romer-Modells, so ist das Modell in Kapitel 9 in gewisser Weise eine Verallgemeinerung: Zum einen in Bezug auf die Quelle langfristigen Wachstums (neue und bessere Produkte), zum anderen auf die Forschungstechnologien (auch hier

nicht-lineare Wissens-Spillover). Allerdings muss dann die Produktionsfunktion für das Endprodukt leicht verändert werden.

Das in diesem Kapitel entwickelte Modell wird nun an zwei Stellen verändert: Erstens ist die Bevölkerungsgröße,  $L$ , nicht mehr konstant, sondern wächst wie im Jones-Modell mit der Rate  $n$ . Zweitens wird eine andere Forschungstechnologie unterstellt.

In der bisher verwendeten Spezifikation war es für die Erfolgswahrscheinlichkeit von Forschung egal, wie viele Verbesserungen in einer Produktlinie bereits stattgefunden haben (siehe (7.4)). Allerdings gibt es empirische Untersuchungen, die vermuten lassen, dass Forschung immer schwieriger wird (und damit die Erfolgswahrscheinlichkeit geringer), weil die Produkte komplexer werden. Die Forschungstechnologie aus Gleichung (7.4) macht diese Annahme nicht. Die Wahrscheinlichkeit für eine Verbesserung ist unabhängig von der Qualitätsstufe des zu verbessernden Produktes und vom allgemeinen technischen Wissen in der Ökonomie. Beispielsweise wird in Kortum (1993) gezeigt, dass das Verhältnis von Patenten zu F&E-Ausgaben (in konstanten Millionen Dollar) zwischen den 1950er Jahren und den 1980er Jahren von drei auf eins gefallen ist. Kortum (1997) argumentiert, dass zunehmend mehr Forscher nötig sind, um ein Patent zu erzeugen. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt Jones (2005): Weil Forschung immer schwieriger wird, arbeiten Forscher in zunehmend spezielleren Gebieten, aber dafür in größeren Teams.

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, wie diese zunehmende Forschungsschwierigkeit in die „Produktionsfunktion“ für bessere Qualitäten eingebaut werden kann. Bei Segerstrom (1998) hat allein das im jeweiligen Sektor erreichte Qualitätsniveau Einfluss auf die Erfolgswahrscheinlichkeit von Forschung,  $I$ . Eine höhere Qualitätsstufe bedeutet bei gleichem Arbeitseinsatz eine niedrigere Erfolgswahrscheinlichkeit. Im Modell von Howitt (1999) ist hingegen die höchste Qualitätsstufe, die in irgendeinem beliebigen Sektor erreicht wurde, für die Erfolgswahrscheinlichkeit jeder Produktlinie relevant. Je höher diese höchste Stufe ist, desto unwahrscheinlicher wird erfolgreiche Forschung in allen Produktlinien. Im Modell hier wird ein „Mittelweg“ dieser zwei extremen Möglichkeiten gewählt: Für die Wahrscheinlichkeit erfolgreicher Forschung ist das durchschnittliche technische Wissen in der Ökonomie relevant. Umso höher dieses ist, desto schwieriger wird Forschung.

In einem symmetrischen Gleichgewicht werden von den höchsten Qualitäten

die gleichen Mengen in der Endproduktherstellung eingesetzt,  $x_{\Omega(j)}(j) = x$ , aber keine niedrigeren Qualitäten,  $x_{\omega}(j) = 0$  für  $\omega < \Omega(j)$ . Mit  $K \equiv \int_0^1 x dj = x$  kann die Produktionsfunktion im Romer-Qualitäten-Modell, Gleichung (7.1), folgendermaßen vereinfacht werden (siehe die Herleitung zu Gleichung (7.38) im Appendix):

$$Y = L_Y^{1-\alpha} K^{\alpha} \left\{ \exp \left[ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj \right] \right\}^{\alpha} = L_Y^{1-\alpha} K^{\alpha} \Delta^{\alpha}, \quad (7.50)$$

wobei  $\Delta$  als

$$\ln \Delta \equiv (\ln \lambda) \int_0^1 \Omega(j) dj \quad (7.51)$$

definiert wurde und als Qualitätsindex interpretiert werden kann. Je höher die erreichten Qualitätsstufen der einzelnen Sektoren sind, desto größer ist der Index und damit die Produktivität in der Endproduktherstellung.

Um die Skaleneffekte aus dem Modell zu eliminieren, wird die Forschungstechnologie, Gleichung (7.4), modifiziert:

$$I dt = d \int_0^1 \Omega(j) dj = \frac{L_A}{a \Delta^{\delta}} dt. \quad (7.52)$$

$\Delta$  repräsentiert den Stand des technischen Wissens in der Ökonomie. Diese Formulierung bedeutet, dass Qualitätsverbesserungen schwieriger werden, je fortgeschrittener die Ökonomie ist, d.h. je höher der Qualitätsindex  $\Delta$  ist. Der Parameter  $\delta$  steuert, wie stark dieser negative Spill-over Effekt ist.<sup>50</sup> Die Wachstumsrate von  $\Delta$  beträgt

$$\frac{d \ln \Delta}{dt} = g_{\Delta} = (\ln \lambda) \frac{d \int_0^1 \Omega(j) dj}{dt} = (\ln \lambda) I = \frac{(\ln \lambda) L_A}{a \Delta^{\delta}}.$$

Im Steady state muss gelten, dass diese Wachstumsrate konstant ist:

$$\frac{d \ln g_{\Delta}}{dt} = \frac{d \ln L_A}{dt} - \delta \frac{d \ln \Delta}{dt} = 0.$$

Mit  $g_{L_A} = g_L = n$  ergibt sich als Wachstumsrate von  $\Delta$ :

$$g_{\Delta} = \frac{n}{\delta} \quad (7.53)$$

---

<sup>50</sup>In der Spezifikation ohne zunehmende Forschungsschwierigkeit, Gleichung (7.4), gilt also  $\delta = 0$ .



Weil in einem Steady state Kapital und Output mit der gleichen Rate wachsen, folgt für die Wachstumsrate des Outputs

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\delta}\right) n. \quad (7.54)$$

Damit wächst die Pro-Kopf-Produktion des Endproduktes,  $y = Y/L$ , mit der Rate

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\delta} n. \quad (7.55)$$

Die Wachstumsrate des Outputs hängt nun also – neben den Parametern  $\alpha$  und  $\delta$  – nur noch von der Wachstumsrate der Bevölkerung ab, die schwer von einer Regierung zu beeinflussen ist. Mit der Forschungstechnologie aus (7.4) könnte die Regierung durch eine einfache Forschungssubvention die langfristige Wachstumsrate erhöhen. Dies ist hier nicht mehr möglich. Die Eigenschaft, dass Niveaugrößen Einfluss auf Wachstumsraten haben, wurde beseitigt. Die Jones-Kritik trifft damit auf diese Variante des Modells nicht mehr zu.

## 7.6 Schluss

Das hier vorgestellte Modell verbindet die Vorzüge aus zwei anderen Modellen. Zum einen wird wie bei Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) Wachstum durch Qualitätsverbesserungen modelliert. Neue, qualitativ bessere Produkte ersetzen alte, es kommt zu „kreativer Zerstörung“ im Schumpeterschen Sinne. Zum anderen wird trotzdem die Struktur des Romer-Modells nicht aufgegeben. Das Modell lässt sich in eine Form bringen, die dem Romer-Modell und damit dem neoklassischen Solow-Modell sehr ähnlich ist. In diesen wächst das Inlandsprodukt langfristig mit der Rate des technischen Wissens. Hier wächst es proportional zur Wachstumsrate des Qualitätsindex (siehe Gleichung (7.43)), was natürlich auch zunehmendes technisches Wissen widerspiegelt. Das Modell passt damit besser als das von Grossman und Helpman zu den empirischen Fakten, vermeidet aber gleichzeitig die Implikation des Romer-Modells, dass keine Produkte überflüssig werden.

Außerdem kann es in diesem Modell zu außergewöhnlichen Effekten kommen. Für bestimmte Parameterkonstellationen kann es zu einer „verdrehten“ komparativen Statik kommen. Und obwohl es im Modell sowohl positive als auch negative externe Effekte gibt, ist die Wachstumsrate des Marktgleichgewichts niedriger als

die im sozialen Optimum. Im Modell von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) kann keine eindeutige Aussage getroffen werden.

Schließlich ist durch eine einfache Modifikation der Gleichung für die Forschungstechnologie der kontrafaktische Skaleneffekt, der sowohl im Romer-Modell als auch im Modell von Grossman/Helpman vorhanden ist, eliminierbar.

## 7.7 Appendix: Anmerkungen zur Produktionsfunktion von $Y$

Beweis, dass im Endproduktsektor konstante Skalenerträge vorliegen:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha.$$

Multiplikation sämtlicher Inputs mit dem Faktor  $\theta$ :

$$\begin{aligned} & (\theta L_Y)^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \theta \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha \\ &= \theta^{1-\alpha} L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \theta \, dj + \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha \\ &= \theta^{1-\alpha} L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \theta \, dj \right\} \right)^\alpha \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha \\ &= \theta^{1-\alpha} L_Y^{1-\alpha} (\exp \{ \ln \theta \})^\alpha \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha \\ &= \theta L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha \\ &= \theta Y \end{aligned}$$

**Zur Substitutionselastizität zwischen Kapitalgütern aus dem gleichen Sektor.**

Untersucht wird die Substituierbarkeit zwischen der höchsten ( $\Omega(j)$ ) und der darauf folgenden Qualität ( $\Omega_{-1}(j)$ ) eines Sektors. Gewinnmaximierung verlangt:  $\max p_Y Y$  s.t.  $\int_0^1 \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j) x_\omega(j) dj = E$ . Aufstellen der Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha + \epsilon \left[ \int_0^1 \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j) x_\omega(j) dj - E \right]$$

Ableiten nach  $x_{\Omega(j)}(j)$  und nach  $x_{\Omega_{-1}(j)}(j)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\Omega(j)}(j)} = \alpha L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha \frac{\lambda^{\Omega(j)}}{\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j)} + \epsilon p_{\Omega(j)}(j) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\Omega-1(j)}(j)} = \alpha L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha \frac{\lambda^{\Omega-1(j)}}{\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j)} + \epsilon p_{\Omega-1(j)}(j) = 0.$$

Aus diesen beiden Bedingungen folgt:

$$\frac{p_{\Omega(j)}(j)}{p_{\Omega-1(j)}(j)} = \lambda.$$

Wenn also die Preise dieser Relation entsprechen, dann werden beide Güter in gleicher Menge eingesetzt. Bleibt der Preis des besten Gutes marginal darunter, dann wird vom direkten Nachfolger nichts mehr in der Produktion von  $Y$  eingesetzt. Die Substitutionselastizität ist also unendlich groß. Im Modell wird die Annahme gemacht, dass die Hersteller des Endproduktes bei Gültigkeit obiger Gleichung immer die bessere Qualität wählen.

### Zur Substitutionselastizität zwischen Kapitalgütern aus verschiedenen Sektoren.

Wie oben gezeigt wird immer nur die höchste Qualität einer Produktlinie im Endproduktsektor verwendet. Die Produktionsfunktion lässt sich dann schreiben als

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \underbrace{\left( \exp \left\{ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj \right\} \right)}_{\equiv D_Y}^\alpha.$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha + \epsilon \left[ \int_0^1 p_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) dj - E \right]$$

Ableiten nach  $x_{\Omega(j)}(j)$  und nach  $x_{\Omega(j')}(j')$  ergibt:<sup>51</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(j)} = L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha \frac{1}{x(j)} + \epsilon p(j) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(j')} = L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha \frac{1}{x(j')} + \epsilon p(j') = 0.$$

---

<sup>51</sup>Zur besseren Übersichtlichkeit der Darstellung kürze ich im Folgenden die Schreibweise: mit  $x(j)$  ist  $x_{\Omega(j)}(j)$  und mit  $p(j)$  ist  $p_{\Omega(j)}(j)$ , also immer die Menge und der Preis der höchsten Qualität, gemeint.

Daraus folgt  $x(j)/x(j') = p(j')/p(j)$  und eine Substitutionselastizität

$$\frac{\partial \left[ \frac{x(j)}{x(j')} \right] \frac{p(j)}{p(j')}}{\partial \left[ \frac{p(j)}{p(j')} \right] \frac{x(j)}{x(j')}} = (-1) \left[ \frac{p(j)}{p(j')} \right]^{-2} \frac{\frac{p(j)}{p(j')}}{\left[ \frac{p(j)}{p(j')} \right]^{-1}} = -1.$$

Die Qualitätsführer betreiben deshalb immer „limit pricing“: Sie möchten den Preis möglichst hoch setzen, weil bei konstantem Umsatz die Produktionskosten fallen und damit die Gewinne steigen. Allerdings sind sie durch mögliche Konkurrenten mit niedrigeren Produktqualitäten aus der gleichen Produktlinie eingeschränkt. Sie setzen deshalb den Preis marginal unter den mit einem Aufschlag,  $\lambda$ , versehenen Grenzkosten des direktesten Konkurrenten.

Im Modell aus Kapitel 9 ist die Substitutionselastizität größer als eins (siehe Gleichung (9.23)). Gleiches gilt für das Grundmodell von Aghion & Howitt (1998, Kapitel 2). Qualitätsführer möchten deshalb ihren Preis nicht möglichst hoch setzen, sondern wählen diejenige Ausbringungsmenge, bei der der Grenzerlös den Grenzkosten entspricht. Bei dem sich dann ergebenden Preis könnte es aber noch Konkurrenten aus der gleichen Produktlinie geben, für die sich eine Produktion ebenfalls noch lohnen würde, die also positive Gewinne machen würden. Dieser Fall wird als nicht-drastische Innovation bezeichnet. Wenn beim Monopolpreis kein Konkurrent mehr im Markt ist, spricht man von einer drastischen Innovation.<sup>52</sup> Es ergeben sich eindeutige Monopolpreise und -mengen. Bei einer nicht-drastischen Innovation funktioniert Monopolpreisbildung nicht. Der Qualitätsführer könnte dann ebenfalls „limit pricing“ betreiben oder mit dem Konkurrenten ein Duopol bilden. Bei der von Aghion/Howitt gewählten Produktionsfunktion müssen also weitere Annahmen getroffen werden: Liegen drastische Innovationen vor oder nicht? Wenn dies nicht der Fall ist: Welches Verhalten wird dann für die Hersteller der Kapitalgüter unterstellt? Die Analyse wird damit komplexer, verspricht aber keine zusätzlichen Erkenntnisse zu liefern.

## 7.8 Appendix: Herleitungen

**Herleitung von Gleichung (7.6):**

$$\max_{x_{\tilde{\omega}(j)}} \pi^Y = L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln [\lambda^{\tilde{\omega}} x_{\tilde{\omega}}(j)] dj \right\} \right)^\alpha - \int_0^1 p_{\tilde{\omega}}(j) x_{\tilde{\omega}}(j) dj - w L_Y.$$

---

<sup>52</sup>Siehe Tirole (1988, Kapitel 10.1).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi^Y}{x_{\tilde{\omega}(j)}} &= L_Y^{1-\alpha} \alpha D_Y^\alpha \frac{1}{x_{\tilde{\omega}(j)}} - p_{\tilde{\omega}}(j) = 0 \\
p_{\tilde{\omega}}(j) x_{\tilde{\omega}(j)} &= \alpha \underbrace{L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha}_{=Y} \\
x_{\tilde{\omega}(j)} &= \alpha \frac{Y}{p_{\tilde{\omega}}(j)}.
\end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.7):**

$$\pi_{\Omega(j)}(j) = p_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) - r\eta x_{\Omega(j)}(j) = \underbrace{[p_{\Omega(j)}(j) - r\eta]}_{=\lambda r\eta} \underbrace{x_{\Omega(j)}(j)}_{=\frac{\alpha Y}{\lambda r\eta}}$$

$$\pi_{\Omega(j)}(j) = \pi = \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) Y.$$

**Herleitung von Gleichung (7.11):**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi^Y}{\partial L_Y} &= (1 - \alpha) L_Y^{-\alpha} D_Y^\alpha - w = 0 \\
(1 - \alpha) L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha &= w L_Y \\
(1 - \alpha) Y &= w L_Y \\
L_Y &= (1 - \alpha) \frac{Y}{w}.
\end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.15):**

Ableiten der Formel für den Patentwert

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s) + I(s)] ds} \pi(\tau) d\tau$$

unter Verwendung der Leibniz-Regel nach der Zeit ergibt:

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_A(t) &= -e^{-\int_t^t [r(s)+I(s)]ds} \pi(t) + \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) [r(t) + I(t)] d\tau \\
 \dot{P}_A(t) &= -\pi(t) + [r(t) + I(t)] \underbrace{\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) d\tau}_{=P_A(t)} \\
 \dot{P}_A(t) &= -\pi(t) + [r(t) + I(t)] P_A(t) \\
 r(t) P_A(t) &= \pi(t) + \dot{P}_A(t) - I(t) P_A(t).
 \end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.17):**

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{P}_A}{P_A} &= r + I - \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A} \\
 &= r + \underbrace{\frac{L}{a} - (1 - \alpha) \frac{Y}{P_A}}_{=I} - \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A} \\
 &= r + \frac{L}{a} - \frac{Y}{P_A} \left[ (1 - \alpha) + \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right] \\
 &= r + \frac{L}{a} - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A}.
 \end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.22):**

Ableiten von (7.20) nach der Zeit und Gleichsetzen mit (7.21) ergibt:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}(t) &= -\sigma c(t)^{-\sigma-1} \dot{c} e^{-\rho t} + c(t)^{-\sigma} e^{-\rho t} (-\rho) = -r(t) \xi(t) \\
 -\sigma \frac{\xi(t)}{c(t)} \dot{c} - \rho \xi(t) &= -r(t) \xi(t) \\
 g_c(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \frac{r(t) - \rho(t)}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.25):**

Sammeln der Terme mit  $I$  in der Gleichung

$$\frac{1}{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} (g_Y \sigma + \rho + I - g_Y) = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{L}{a} - I \right)$$

und Umformen führt zu

$$\begin{aligned}
 I \left[ \frac{1}{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} + \frac{1}{1 - \alpha} \right] &= \frac{1}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} - \frac{1}{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} [g_Y(\sigma - 1) + \rho] \\
 I \left[ \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) (1 - \alpha)} \right] &= \frac{1}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} - \frac{1}{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} [g_Y(\sigma - 1) + \rho] \\
 I &= \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \frac{L}{a} - \frac{(1 - \alpha)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)} [g_Y(\sigma - 1) + \rho].
 \end{aligned}$$

### Herleitung von Gleichung (7.28):

Werden nur höchste Qualitäten in der Produktion eingesetzt, dann lautet die Gleichung (7.2):

$$D_Y = \exp \left\{ \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj \right\}.$$

Logarithmieren liefert:

$$\begin{aligned}
 \ln D_Y &= \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj \\
 &= \int_0^1 [\ln \lambda^{\Omega(j)} + \ln x_{\Omega(j)}(j)] dj \\
 &= \int_0^1 \Omega(j) \ln \lambda dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj \\
 &= (\ln \lambda) \int_0^1 \Omega(j) dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj.
 \end{aligned}$$

Ableiten nach der Zeit und Gleichungen (7.9) und (7.10) ergeben

$$\frac{d \ln D_Y}{dt} = g_{D_Y} = I \ln \lambda + \frac{d \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj}{dt}.$$

Auf der rechten Seite gilt:  $x_{\Omega(j)}(j) = \alpha Y / (r \lambda \eta) = x$  und somit im Steady state  $g_x = g_Y$ .  $(d \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj) / dt$  kann umgeformt werden zu  $(d \int_0^1 \ln x dj) / dt = (d \ln x) / dt = g_x = g_Y$ . Damit ergibt sich (7.28):

$$g_{D_Y} = I \ln \lambda + g_Y.$$



**Beweis, dass für  $\sigma > 1$  Bedingung (7.24) immer erfüllt ist:**

Einsetzen von (7.35) in  $\rho > (1 - \sigma)g_Y$  und Umformen (wobei  $1 > \alpha/\lambda$  und  $\sigma > 1$ ) ergibt:

$$\begin{aligned} \rho &> \frac{\alpha(\sigma - 1) \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \left[ \rho - \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{(1 - \alpha)} \right] \\ \rho - \frac{\alpha(\sigma - 1) \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \rho &> - \frac{\alpha(\sigma - 1) \ln \lambda \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right] (1 - \alpha)} \\ \rho \left[ \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \right] &> - \frac{\alpha(\sigma - 1) \ln \lambda \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right] (1 - \alpha)} \\ \rho &> - \frac{\alpha^2(\sigma - 1) \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Der Zähler ist strikt positiv für  $\sigma > 1$ . Der Nenner ist ebenfalls größer als null. Damit wird der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite negativ. Weil für  $\rho$  per Annahme nur positive Werte zulässig sind, ist Bedingung (7.24) für  $\sigma > 1$  immer erfüllt.

**Herleitung von Gleichung (7.35):**

Einsetzen von (7.25) in  $g_Y = \alpha I \ln \lambda / (1 - \alpha)$  ergibt

$$g_Y = \ln \lambda \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} - \frac{(1 - \alpha)(\sigma - 1)}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} g_Y - \frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \rho \right].$$

Die Terme mit  $g_Y$  sammeln und vereinfachen:

$$\begin{aligned} g_Y \left[ 1 + \frac{\alpha(\sigma - 1) \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \right] &= \ln \lambda \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} - \frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \rho \right] \\ g_Y \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} &= \ln \lambda \frac{\alpha}{(1 - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \left[ \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a} - (1 - \alpha) \rho \right] \\ g_Y &= \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right] (1 - \alpha)} \left[ \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a} - (1 - \alpha) \rho \right] \\ g_Y &= \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{L}{a}}{(1 - \alpha)} - \rho \right]. \end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.36):**

Einsetzen von (7.35) in  $\rho > (1 - \sigma)g_Y$  ergibt:

$$\rho > \frac{(1 - \sigma)\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{(1 - \alpha) a} - \rho \right]$$

$$\rho \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} > \frac{(1 - \sigma)\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{(1 - \alpha) a}.$$

Wenn  $1 - \alpha/\lambda + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda > 0$ , dann folgt

$$\phi > \frac{\alpha^2(1 - \sigma) \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha)}.$$

Andernfalls ( $1 - \alpha/\lambda + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda < 0$ ) gilt

$$\phi < \frac{\alpha^2(1 - \sigma) \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha)}.$$

$1 - \alpha/\lambda + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda$  größer (kleiner) 0 ist äquivalent zu  $\sigma$  größer (kleiner)  $\bar{\sigma}$ , wie eine einfache Umformung zeigt.

**Herleitung der Geraden II:**

Zunächst wird die gleichgewichtige Forschungsintensität  $I$  berechnet. Einsetzen von (7.35) in (7.29):

$$I = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{1}{\ln \lambda} g_Y$$

$$= \frac{1 - \alpha}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) L}{(1 - \alpha) a} - \rho \right].$$

Im Forschungssektor kann maximal die gesamte, zur Verfügung stehende Arbeit eingesetzt werden, also  $I \leq L/a$ .  $\sigma < \bar{\sigma}$  bedeutet, dass der Nenner im Bruch der letzten Gleichung negativ ist.  $I \leq L/a$  lässt sich umformen zu

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - (1 - \alpha)\rho \frac{a}{L} \geq 1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda$$

bzw.

$$\rho \frac{a}{L} \equiv \phi \leq \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (1 - \sigma) \ln \lambda - 1. \quad (7.56)$$

An der Stelle  $\sigma = 0$  lautet die Transversalitätsbedingung (7.36)

$$\phi < \frac{\alpha^2 \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha)}. \quad (7.57)$$

Diese Bedingung ist an der Stelle  $\sigma = 0$  stärker als die in Ungleichung (7.56):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha)} &< \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \lambda - 1 \\ \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} - 1 \right] &< -1 \\ \alpha \ln \lambda &> 1 - \frac{\alpha}{\lambda}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, weil für  $\bar{\sigma}$  nur Werte größer als null hier überhaupt in Betracht kommen.  $\bar{\sigma} = (\alpha \ln \lambda - 1 + \alpha/\lambda)/(\alpha \ln \lambda) > 0$  impliziert  $\alpha \ln \lambda > 1 - \alpha/\lambda$ . Der Ordinatenabschnitt in Abbildung 7.5 ist somit für die Transversalitätsbedingung niedriger. Außerdem schneiden sich beide Geraden im Punkt  $(\bar{\sigma}; \alpha(1 - 1/\lambda)/(1 - \alpha))$ . Für die Transversalitätsbedingung wurde dies bereits gezeigt. Für die Gerade *II* an der Stelle  $\bar{\sigma}$  gilt

$$\begin{aligned} \phi &< \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( 1 - 1 + \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \right) \ln \lambda - 1 \\ \phi &< \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{1 - \alpha} - 1 = \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Für  $\sigma < \bar{\sigma} < 1$  gilt analog  $\phi > \alpha(1 - \sigma)(\ln \lambda)/(1 - \alpha) - 1$ . Weil die Steigung dieser Restriktionsgeraden steiler ist als die der Transversalitätsbedingung, ist hier direkt ersichtlich, dass die Transversalitätsbedingung stärker ist als diese Restriktion. Insgesamt ist für den gesamten Bereich  $0 < \sigma < 1$  die Transversalitätsbedingung eine stärkere Restriktion als die durch die Bevölkerungsgröße auferlegte. Die Letztgenannte wird durch die Erste impliziert.

### Herleitung von Gleichung (7.38):

Das statische Maximierungsproblem des sozialen Planers zu jedem Zeitpunkt besteht darin, das vorhandene Kapital so auf die einzelnen Produktlinien aufzuteilen (und damit die eingesetzten Mengen an Kapitalgütern festzulegen), dass der Output des Endproduktes (bzw. der Logarithmus davon) maximiert wird:

$$\begin{aligned} \max_{x_{\Omega(j)}(j)} \ln Y &= (1 - \alpha) \ln L_Y + \alpha \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj \\ \text{s.t. } \int_0^1 K(j) dj &= \int_0^1 \eta x_{\Omega(j)}(j) = K. \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = (1 - \alpha) \ln L_Y + \alpha \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj - \phi \left[ \int_0^1 \eta x_{\Omega(j)}(j) - K \right].$$

Aus der Optimalitätsbedingung ( $\partial \mathcal{L} / \partial x_{\Omega(j)}(j) = 0$ ) für zwei beliebige Güter  $j$  und  $j'$  folgt  $x_{\Omega(j)}(j) = \alpha / (\phi \eta) = x_{\Omega(j')}(j')$ . Die eingesetzte Menge eines Gutes ist also für alle Güter gleich,  $x(j) = x$ .

Der Kapitalstock in der Ökonomie ergibt sich dann als  $K \equiv \int_0^1 K(j) dj = \int_0^1 \eta x_{\Omega(j)}(j) dj = \eta x$ .

Umformen der Produktionsfunktion liefert <sup>53</sup>

$$\begin{aligned} Y &= L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln [\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)] dj \right\} \right)^\alpha \\ &= L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \lambda^{\Omega(j)} dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj \right\} \right)^\alpha \\ &= L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \Omega(j) \ln \lambda dj + \int_0^1 \ln x dj \right\} \right)^\alpha \\ &= L_Y^{1-\alpha} x^\alpha \left( \exp \left\{ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj \right\} \right)^\alpha \\ &= L_Y^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \underbrace{\left( \exp \left\{ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj \right\} \right)^\alpha}_{\equiv \Delta}. \end{aligned}$$

Einsetzen von  $(L - aI)$  für  $L_Y$  ergibt schließlich

$$Y = (L - aI)^{1-\alpha} \left( \frac{K}{\eta} \right)^\alpha \Delta^\alpha.$$

---

<sup>53</sup>Es werden – wie gezeigt – nur die höchsten Qualitäten produziert.

**Herleitung von Gleichung (7.47):**

Einsetzen von (7.29) und (7.40) in (7.46) ergibt

$$\begin{aligned}
g_Y \left( \frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma \right) &= \rho - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda \\
g_Y \left( \frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma \right) &= \rho - \frac{(L - aI)\Delta \ln \lambda}{a(1 - \alpha)Y} \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda \\
g_Y \left( \frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma \right) &= \rho - \frac{\alpha L \ln \lambda}{a(1 - \alpha)} + I \ln \lambda \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} - 1 \right) \\
g_Y \left( \frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma \right) &= \rho - \frac{\alpha L \ln \lambda}{a(1 - \alpha)} + \frac{(1 - \alpha)g_Y}{\alpha \ln \lambda} \ln \lambda \frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha} \\
g_Y \left( \frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma - \frac{2\alpha - 1}{\alpha} \right) &= \rho - \frac{\alpha L \ln \lambda}{a(1 - \alpha)} \\
g_Y^* &= \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \frac{L}{a} - \rho \right).
\end{aligned}$$

**Herleitung von Gleichung (7.48):**

Einsetzen von (7.37) und (7.47) in  $g_Y^* > g_Y$  ergibt

$$\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \frac{L}{a} - \rho \right) > \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right].$$

Multiplizieren auf beiden Seiten mit  $\sigma$  und  $a/L$  ergibt (7.48).

**Herleitung von Gleichung (7.49):**

Einsetzen von  $\bar{\sigma}$  in

$$\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} - \phi > \frac{1}{1 - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \phi \right]$$

und Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} - \phi &> \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \left[ \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \phi \right] \\
\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \left[ 1 - \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \right] &> \phi \left( 1 - \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \right) \\
\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} &> \phi \left( 1 - \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

Mit  $\alpha \ln \lambda / (1 - \alpha/\lambda) = 1/(1 - \bar{\sigma})$  folgt:

$$\frac{1}{1 - \bar{\sigma}} > \phi \frac{-\bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}}.$$

**Berechnung von  $\sigma|_{g_Y=g_Y^*}$ :**

Gleichsetzen von (7.35) mit (7.47) und Auflösen nach  $\sigma$  führt zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \ln \lambda L}{1 - \alpha} \frac{1}{a} - \rho \right) &= \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[ 1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda \right]} \\ &\quad \left[ \frac{\alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) L}{(1 - \alpha)} \frac{1}{a} - \rho \right] \\ \frac{\alpha \ln \lambda}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} \left[ 1 - \frac{\alpha \sigma \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right)}{1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda} \right] &= \rho \left[ 1 - \frac{\alpha \sigma \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda} \right] \\ \frac{\alpha \ln \lambda}{(1 - \alpha)} \frac{L}{a} &= \rho \left[ 1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda \right] \\ \left[ 1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha \sigma \left( \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \alpha \ln \lambda \right] &= \rho \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda \right) \\ \alpha \sigma \left( \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} \right) &= \left( \rho \frac{a}{L} \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda \right) \\ \sigma|_{g_Y=g_Y^*} &= \left( \phi \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1 \right) \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda}{\alpha \left( \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} \right)}. \end{aligned}$$

**Berechnung von  $\phi(\sigma')$ :**

Einsetzen von  $\sigma'$  in die Transversalitätsbedingung (7.36):

$$\begin{aligned} \phi &< \frac{\alpha^2 (1 - \sigma') \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \ln \lambda}{\left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) (1 - \alpha)} \\ &= \frac{\alpha^2 \left[ 1 - \left( \phi \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1 \right) \frac{\left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda \right)}{\alpha \left( \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} \right)} \right]}{\left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) (1 - \alpha)} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \ln \lambda \\ &= \frac{\alpha \left[ \frac{1 - \alpha - \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda \right) \phi \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda}}{\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}} \right] \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \ln \lambda}{\left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) (1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Weil  $\ln \lambda > 1 - 1/\lambda$  (siehe Abbildung 7.7) gilt, folgt:

$$\begin{aligned} \phi \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha) \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) &< \alpha \left[1 - \alpha - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \phi \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda}\right] \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda \\ \phi \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) (1 - \alpha) \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) &< \alpha(1 - \alpha) \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \frac{\phi}{\alpha \ln \lambda}\right] \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda. \end{aligned}$$

Sammeln der Terme mit  $\phi$  und Vereinfachen liefert:

$$\begin{aligned} \phi \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \phi \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) &< \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda \\ \phi \left[\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right] &< \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda \\ \phi(1 - \alpha) \ln \lambda &< \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda \\ \phi &< \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$





# Kapitel 8

## Komparative Statik und Dynamik im Romer-Qualitäten-Modell

Im letzten Kapitel wurde das Romer-Qualitäten-Modell vorgestellt, in dem Wachstum durch Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte im Rahmen des Romer-Modells aus Kapitel 2 modelliert wurde. In diesem Kapitel werden die komparativ-statischen Eigenschaften des Modells genauer als in Kapitel 7 analysiert und die dynamischen Eigenschaften des Modells – abseits eines Steady states – untersucht. Zum besseren Verständnis der Stabilitätsanalyse werden die Grundprinzipien anhand einfacherer Systeme im nächsten Abschnitt erklärt. Die Untersuchung für das Romer-Qualitäten-Modell folgt im Anschluss.

### 8.1 Stabilität in Wachstumsmodellen

#### 8.1.1 Differentialgleichungen

Das Verhalten von Variablen, die sich im Zeitablauf ändern, lässt sich über Differentialgleichungen beschreiben. Sehr einfach zu lösen<sup>1</sup> sind lineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b. \quad (8.1)$$

Man löst solche Gleichungen üblicherweise in zwei Schritten: Es werden die

---

<sup>1</sup>Lösen meint hier die unbekannte Funktion  $y(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, die diese Gleichung erfüllt. Für eine kurze Einführung siehe Chiang (1984, Kapitel 13-15). Gandolfo (1996) gibt einen umfassenden Überblick.

Lösung der komplementären Funktion der Gleichung und die Lösung eines bestimmten (beliebigen) Integrals ermittelt. Addition der beiden Ergebnisse ergibt dann die gesuchte Gleichung. Hier:  $\dot{y} + ay = 0$  liefert folgende komplementäre Funktion  $y_c = Ae^{-at}$ , mit  $A$  als beliebiger Konstante. Für den zweiten Schritt versucht man eine möglichst einfache Form eines bestimmten Integrals zu finden. Ein Versuch ist, dass  $y(t) = konst.$  angenommen wird. Es folgt direkt  $\dot{y} = 0$  und  $y_p = b/a$ . Beide Gleichungen zusammen ergeben dann die gewünschte Lösung

$$y(t) = \frac{b}{a} + Ae^{-at}. \quad (8.2)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite wird im Zeitablauf (mit zunehmendem  $t$ ) immer kleiner, wenn  $a$  positiv ist. Wird  $t$  sehr groß (und geht gegen unendlich), dann verschwindet der Term komplett, und es bleibt  $y(t) = b/a$  stehen.  $y$  konvergiert also gegen einen eindeutigen Wert (Steady state).

In der Herleitung von Gleichung (8.2) sind also schon zwei wichtige Bedingungen für dynamische Stabilität eines Steady states erkennbar: Erstens muss es für einen Steady state ein bestimmtes Integral geben. Zweitens muss die Komplementärfunktion einen negativen Exponenten haben. Zur Veranschaulichung zwei einfache Beispiele aus der klassischen Wachstumstheorie.

### 8.1.2 Solow-Modell

Im Solow-Modell wird mit Arbeit,  $L$ , und Kapital,  $K$ , ein homogenes Endprodukt,  $Y$ , gemäß einer linear-homogenen Produktionsfunktion hergestellt:  $Y = F(K, TL)$ . Das technische Wissen,  $T$ , muss arbeitsvermehrend sein. Es wird eine konstante Sparquote unterstellt. Ohne Abschreibungen auf Kapital ergibt sich die Akkumulationsgleichung  $\dot{K} = sY$ . In Arbeits-Effizienzeinheiten lautet die Produktionsfunktion (mit  $k \equiv K/(TL)$ ):  $y \equiv Y/(TL) = F[k/(TL), 1] = f(k)$ .<sup>2</sup> Die zentrale Gleichung im Solow-Modell, die die Kapitalakkumulation beschreibt (pro Arbeits-Effizienzeinheit), lautet

$$\dot{k}(t) = sf[k(t)] - (n + g)k(t). \quad (8.3)$$

Die Gleichung besagt, dass der Kapitalstock steigt, wenn die Investitionen (bzw. das Sparen  $sf(k)$ ) größer sind als das Break-even-Investment (mit  $n$  als

---

<sup>2</sup>Siehe beispielsweise Arnold (1997, Kapitel 3), Romer (2001, Kapitel 1) oder Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 1).

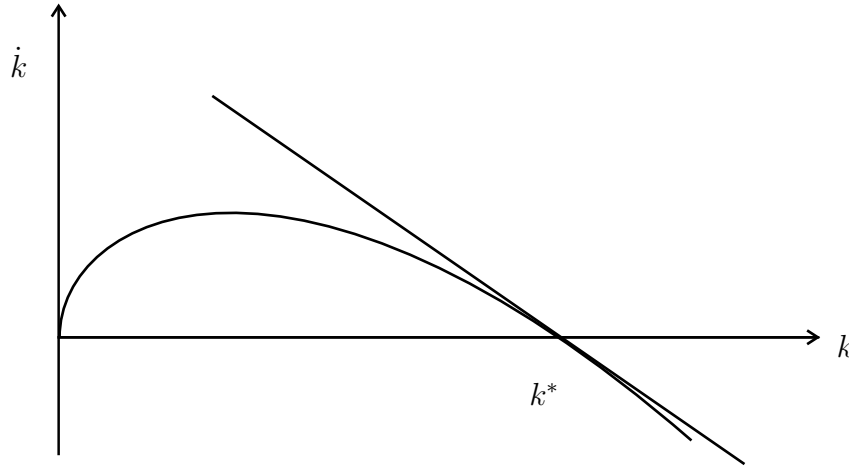


Abbildung 8.1: Phasendiagramm und Linearisierung um den Steady state

Bevölkerungswachstum und  $g$  als Wachstum des technischen Wissens; Abschreibung wird vernachlässigt).  $\dot{k}$  lässt sich als eine nicht-lineare Funktion von  $k$  darstellen. Anhand von Abbildung 8.1 lässt sich leicht sehen, dass  $k$  gegen einen stabilen Wert,  $k^*$ , konvergiert. Links von  $k^*$  ist  $\dot{k}$  größer als null, d.h.  $k$  steigt, rechts von  $k^*$  ist  $\dot{k}$  kleiner als null, d.h.  $k$  fällt. Außer dem Ursprung, der hier nicht von Interesse ist, ist  $k^*$  der einzig stabile Wert.<sup>3</sup> Für mehr als 2-dimensionale Modelle ist aber eine grafische Analyse nicht mehr möglich, deshalb muss Stabilität rechnerisch ermittelt werden. Dies ist prinzipiell das Gleiche wie in diesem einfachen Beispiel hier, weshalb es kurz gezeigt wird, obwohl bereits die grafische Analyse Stabilität zeigt.

Ein übliches Vorgehen ist, nicht-lineare Gleichungen um den Steady state zu linearisieren. Dies geschieht mittels Taylor-Reihen-Approximation.<sup>4</sup> Anstatt der ursprünglichen Gleichung erhält man als Annäherung eine lineare Gleichung, anhand derer dann Stabilität untersucht wird. Das linearisierte System hat lokal die gleichen Stabilitätseigenschaften wie das nicht-lineare. Für Gleichung (8.3),

<sup>3</sup>In Hakenes & Irmen (2006) wird argumentiert, dass der Ursprung mit  $k = 0$  tatsächlich sehr instabil ist, die Ökonomie früher oder später diesem Steady state „entfliehen“ kann und gegen  $k^*$  konvergiert.

<sup>4</sup>An der Stelle  $k = k^*$  gilt näherungsweise:  $\partial \dot{k}(k)/\partial k \approx [\dot{k}(k) - \dot{k}(k^*)]/(k - k^*)$ . Wegen  $\dot{k}(k^*) = 0$  folgt:

$$\dot{k} \approx \left. \frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} (k - k^*).$$

ausgewertet an der Stelle  $k = k^*$ , folgt<sup>5</sup>

$$\dot{k} = -a(k - k^*), \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} = sf'(k^*) - (n + g) \equiv -a.$$

Damit ein eindeutiger Steady state vorliegt, muss  $sf'(k)$  kleiner sein als  $(n + g)$ .  $a$  ist damit positiv. Umformen liefert  $\dot{k} + ak = ak^*$ . Definiere schließlich  $ak^* \equiv b$ , dann erhält man die gleiche Form wie in (8.1):

$$\dot{k} + ak = b.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich analog zu oben  $k(t) = b/a + Ae^{-at} = k^* + Ae^{-at}$ . Für  $t = 0$  gilt  $k(0) = k^* + A$ , somit  $A = k(0) - k^*$ . Es folgt

$$k(t) = k^* + [k(0) - k^*]e^{-at}.$$

Ist der Anfangswert von  $k$ ,  $k(0)$ , kleiner als  $k^*$ , dann steigt  $k$  allmählich; ist  $k(0)$  größer, dann sinkt  $k$ .  $k$  konvergiert also gegen  $k^*$ , die Anpassung erfolgt mit Rate  $-a = \partial \dot{k}(k)/\partial k$ .

Alternativ kann das Problem auch gelöst werden, wenn nicht die Variable  $k$  selbst, sondern deren Abweichung vom Steady state angeschaut wird:  $k - k^* \equiv \tilde{k}$ . Hierbei gilt  $d(k - k^*)/dt = \dot{\tilde{k}} = \dot{k}$ , weil  $k^*$  eine Konstante ist. Es folgt  $\dot{\tilde{k}} = -a\tilde{k}$  bzw.  $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k} = -a$ . Der Abstand von  $k$  zu  $k^*$ ,  $\tilde{k}$ , nimmt also mit konstanter Rate ab. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet  $\tilde{k}(t) = \tilde{k}(0)e^{-at}$  bzw.  $k(t) = k^* + [k(0) - k^*]e^{-at}$ .

Etwas schwieriger wird die Analyse, wenn anstatt einer konstanten Sparquote, wie im Solow-Modell, nutzenmaximierende Konsumenten unterstellt werden.

### 8.1.3 Ramsey-Cass-Koopmans-Modell

Im Ramsey-Cass-Koopmans-Modell<sup>6</sup> ist die Produktionsfunktion die gleiche wie im Solow-Modell:  $Y = F(K, TL)$ . Aber die Sparentscheidung der Haushalte und damit die Akkumulation von Kapital wird endogenisiert. Einkommen aus Kapitalbesitz und Arbeit wird für Konsum und Kapitalerwerb verwendet:  $Y =$

<sup>5</sup>Zur besseren Lesbarkeit wird im Folgenden anstatt  $\approx$  immer ein Gleichheitszeichen verwendet.

<sup>6</sup>Das ursprüngliche Modell stammt von Ramsey (1928). Es wurde von Cass (1965) und Koopmans (1965) weiterentwickelt.

$wL + rK = \dot{K} + cL$ . Die Gleichung für Kapitalakkumulation lautet  $\dot{K} = Y - cL$ . Mit  $k = K/(TL)$  wird so aus Gleichung (8.3)

$$\dot{k}(t) = f[k(t)] - C(t) - (n + g)k(t), \quad (8.4)$$

wobei  $C(t)$  eine zusätzliche endogene Variable ist, die hier den Pro-Kopf-Konsum,  $c(t)$ , in Effizienzeinheiten angibt:  $C(t) \equiv c(t)/T(t)$ . Mit der üblichen CES-Nutzenfunktion ergibt sich folgende Ramsey-Regel:<sup>7</sup>

$$\dot{C}(t) = \frac{f'[k(t)] - \rho - \sigma g}{\sigma} C(t). \quad (8.5)$$

Mit (8.4) und (8.5) hat man ein System aus zwei (zeit-)autonomen Differentialgleichungen. Es gibt einen Steady state  $(k^*, c^*)$ , in dem beide Variablen konstant sind.<sup>8</sup> Untersucht wird jetzt wieder, ob solch ein Zustand in einem Marktsystem auch erreicht wird. Das Vorgehen entspricht im Wesentlichen dem obigen.

Als Erstes werden die nicht-linearen Gleichungen um den Steady state durch Taylor-Reihen-Approximation linearisiert. Aus den jeweiligen Gleichungen  $\dot{C} = (\partial \dot{C} / \partial k)(k - k^*) + (\partial \dot{C} / \partial C)(C - C^*)$  und  $\dot{k} = (\partial \dot{k} / \partial k)(k - k^*) + (\partial \dot{k} / \partial C)(C - C^*)$  ergeben sich

$$\frac{\dot{\tilde{C}}}{\tilde{C}} = \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \frac{\tilde{k}}{\tilde{C}} \quad (8.6)$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \beta - \frac{\tilde{C}}{\tilde{k}}, \quad (8.7)$$

mit  $\beta \equiv f'[k^*(t)] - (n + g) = \rho - (1 - \sigma)g - n$  und  $\tilde{C}$  und  $\tilde{k}$  wieder als Abweichungen von den Steady states,  $C^*$  und  $k^*$ . Die Gleichungen geben die Anpassungsrate der Variablen an die Steady-state-Werte an. Nun werden Lösungen für diese beiden Differentialgleichungen gesucht, für die das Verhältnis von  $C$  und  $k$  konstant ist. Solche Pfade lassen sich durch Geraden im  $k$ - $C$ -Diagramm darstellen. Es wird sich herausstellen, dass es zwei Lösungen mit konstantem Verhältnis von  $C$  und

---

<sup>7</sup>Aus der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} L(t) \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \xi(t) \left[ f[k(t)] - \frac{c(t)}{T(t)} - (n + g)k(t) \right]$$

folgen die Optimalitätsbedingungen  $\dot{\xi}(t)/\xi(t) = -\rho - \sigma \dot{c}(t)/c(t) + n + g$  und  $\xi(t)[f'(k) - (n + g)] = -\dot{\xi}(t)$ . Aus diesen ergibt sich die Ramsey-Regel  $\dot{c}/c = [f'(k) - \rho]/\sigma$ . In faktorintensiver Schreibweise ( $\dot{C}/C = \dot{c}/c - g$ ) ergibt sich (8.5).

<sup>8</sup>Konstanz von  $C$  bedeutet, dass der Pro-Kopf-Konsum,  $c$ , mit Rate  $g$  wächst.

$k$  gibt. Außerdem gilt, dass Linearkombinationen dieser Lösungen selbst auch wieder Lösungen sind. Aus den zwei Lösungen mit konstantem Verhältnis von  $C$  und  $k$  lassen sich also die Anpassungspfade sämtlicher Kombinationen aus  $C$  und  $k$  bestimmen.

Angenommen also, die Anpassungsrate an den Steady state wäre für  $k$  konstant. Dann folgt aus (8.7), dass die Wachstumsraten der Anpassung für  $\tilde{C}$  und  $\tilde{k}$  gleich sein müssen. Definiert man diese Rate als  $q$ , dann folgt nach Eliminieren des Verhältnisses  $\tilde{k}/\tilde{C}$  durch gegenseitiges Einsetzen:  $q = [f''(k^*)C^*]/[\sigma(\beta - q)]$ , oder

$$q^2 - \beta q + \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} = 0. \quad (8.8)$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung liefert zwei mögliche Werte für  $q$ , von denen gezeigt werden kann, dass der eine positiv, der andere negativ ist.<sup>9</sup> Ein positives  $q$  heißt, dass der Abstand der Variablen zu ihren Steady-state-Werten immer größer wird. Der Pfad ist instabil. Ein negatives  $q$  bedeutet umgekehrt, dass der Steady state erreicht wird. Weil beide Möglichkeiten gegeben sind, folgt, dass es einen stabilen und einen instabilen Pfad in den Steady state gibt. Welcher Pfad eingeschlagen wird, bestimmt sich über die Startwerte von  $C$  und  $k$ .<sup>10</sup>

Eine etwas andere, aber sehr verbreitete und in komplexeren Systemen alternativlose Form der Analyse verwendet die Lineare Algebra.<sup>11</sup> Gleichungen (8.6) und (8.7) lassen sich Umformen zu

$$\dot{\tilde{C}} = \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \tilde{k} \quad (8.9)$$

$$\dot{\tilde{k}} = \beta \tilde{k} - \tilde{C} \quad (8.10)$$

---

<sup>9</sup>Lösen von Gleichung (8.8) mittels quadratischer Lösungsformel:

$$q_{1/2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma}}.$$

Weil  $f''(k^*) < 0$  und  $\sigma > 0$  gilt und  $C^*$  nicht negativ sein kann, ist der Wurzel-Ausdruck positiv. Weil auch der erste Ausdruck positiv ist ( $\beta$  muss positiv sein, damit das Nutzenintegral konvergiert; siehe Gleichung (9.51) und die Erläuterungen dazu), erhält man einen positiven Wert, wenn man beide Terme addiert.  $q_2$  ist also größer als null. Somit ist nur noch zu zeigen, dass  $q_1 < 0$  gilt. Weil  $f''(k^*) < 0 < C^*$  und  $\sigma > 0$  gilt, ist  $\beta/2$  kleiner als der Wurzelausdruck. Die Differenz der beiden,  $q_1$ , ist negativ.

<sup>10</sup>Im Modell stellt sich aber heraus, dass nur der stabile Pfad mit rationalen Erwartungen und der Bedingung, dass der Kapitalstock nicht negativ werden kann, vereinbar ist.

<sup>11</sup>Siehe z.B. Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 2.8), Arnold (2000a) oder Arnold (2005b).

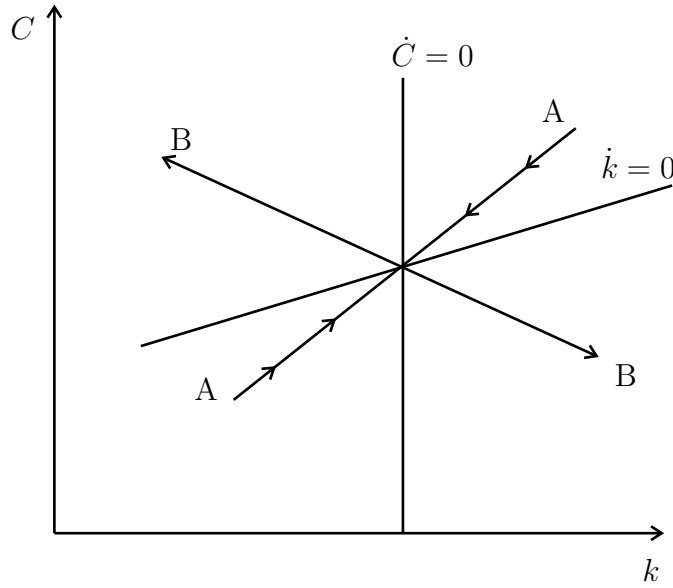


Abbildung 8.2: Phasendiagramm im linearisierten Ramsey-Modell

und in Matrixform schreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{C}} \\ \dot{\tilde{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{k} \end{pmatrix}.$$

In Kurzform lautet das System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \mathbf{x}$ .  $\mathbf{x}$  steht hierbei für den Spaltenvektor aus  $\tilde{C}$  und  $\tilde{k}$ ,  $\mathbf{J}$  wird als Jacobi-Matrix bezeichnet. Es sei angenommen, dass beide Variablen  $\tilde{C}$  und  $\tilde{k}$  mit der gleichen Rate,  $q$ , gegen den Steady state konvergieren. Als Gleichungen, die diese Bewegung beschreiben, werden die allgemeinen Formen  $\tilde{C}(t) = b_C e^{qt}$  und  $\tilde{k}(t) = b_k e^{qt}$  probiert. Mit  $\dot{\tilde{C}}(t) = q b_C e^{qt}$  und  $\dot{\tilde{k}}(t) = q b_k e^{qt}$  ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_C e^{qt} \\ b_k e^{qt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q b_C e^{qt} \\ q b_k e^{qt} \end{pmatrix}.$$

Nach Kürzen des Faktors  $\exp(qt)$  folgt in Kurzform:  $\mathbf{J} \mathbf{b} = q \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{b} = (b_C \ b_k)'$ . Gesucht sind Werte für den unbekannten Skalar  $q$  und Vektor  $\mathbf{b}$ , die dieses System erfüllen.  $q$  wird als *Eigenwert*,  $\mathbf{b}$  als zugehöriger *Eigenvektor* bezeichnet. Umstellen ergibt

$$\begin{pmatrix} -q & \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \\ -1 & \beta - q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_C \\ b_k \end{pmatrix} = 0. \quad (8.11)$$

Um nicht-triviale Lösungen<sup>12</sup> zu erhalten, muss die Determinante der Matrix gleich null sein:

$$\begin{vmatrix} -q & \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \\ -1 & \beta - q \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung dieser Determinante wird als *charakteristische Gleichung* bezeichnet und lautet ausgeschrieben

$$q^2 - \beta q + \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} = q^2 - \text{Tr}(\mathbf{J})q + \text{Det}(\mathbf{J}) = 0$$

und ist identisch zu Gleichung (8.8). Lösen liefert die obigen zwei mögliche Werte für  $q$ ,  $q_1 < 0$  und  $q_2 > 0$ . Die speziellen Lösungen  $\tilde{C}(t) = b_{C_1} e^{q_1 t}$  und  $\tilde{k}(t) = b_{k_1} e^{q_1 t}$  geben den stabilen Pfad des Systems an. Entsprechend stehen  $\tilde{C}(t) = b_{C_2} e^{q_2 t}$  und  $\tilde{k}(t) = b_{k_2} e^{q_2 t}$  für den instabilen Pfad. Abbildung 8.2 zeigt beide Pfade.<sup>13</sup> AA ist der stabile, BB der instabile Arm.<sup>14</sup> Die Werte für  $b_{k_1}$  und  $b_{C_1}$  erhält man, wenn  $q_1$  in (8.11) eingesetzt wird, die für  $b_{k_2}$  und  $b_{C_2}$  folgen durch Einsetzen von  $q_2$  in (8.11). Was passiert aber, wenn  $k$ - $C$ -Kombinationen gewählt werden, die nicht auf einer der beiden Geraden liegen?

Linearkombinationen der zwei speziellen Lösungen sind selbst Lösungen der beiden Differentialgleichungen. Somit kann der Anpassungspfad für jeden Punkt im  $k$ - $C$ -Raum durch die obigen Gleichungen beschrieben werden. Für  $\tilde{C}(t)$  und  $\tilde{k}(t)$  erhält man dann die allgemeinen Lösungen des Systems

$$\tilde{C}(t) = A_1 b_{C_1} e^{q_1 t} + A_2 b_{C_2} e^{q_2 t} \quad (8.12)$$

$$\tilde{k}(t) = A_1 b_{k_1} e^{q_1 t} + A_2 b_{k_2} e^{q_2 t}, \quad (8.13)$$

mit  $A_1, A_2$  als beliebigen Konstanten.

Für  $A_1, A_2, b_{C_1}, b_{C_2}, b_{k_1}, b_{k_2}$  jeweils ungleich null und sehr große  $t$  geht der erste Term jeweils gegen null, der zweite wird sehr groß und das System divergiert. Alle

<sup>12</sup>Die Gleichung ist immer erfüllt, wenn  $b_C = b_k = 0$  gilt. Diese triviale Lösung ist aber nicht von Interesse.

<sup>13</sup>Und außerdem alle  $C$ - $k$ -Kombinationen, bei denen  $\dot{C} = 0$  und  $\dot{k} = 0$  gilt (aus (8.6) und (8.7)).

<sup>14</sup>Die Steigungen werden weiter unten noch berechnet.



$k$ - $C$ -Kombinationen, die nicht auf AA liegen sind also instabil. Das System ist sattelpunktstabil. Um für einen gegebenen Anfangsbestand an Kapital,  $k(0) = k_0$ , den Steady state zu erreichen, muss also  $C(0)$  so gewählt werden, dass es genau auf der AA-Linie liegt. Das bedeutet, dass in den obigen Gleichungen  $A_2 = 0$  gelten muss.  $\tilde{C}(0)$  ist damit  $A_1 b_{C_1}$ . Aus (8.13) folgt  $\tilde{k}(0) = A_1 b_{k_1} = \tilde{k}_0$ . Mit dieser Gleichung ist  $A_1$  und damit auch  $C(0)$  eindeutig festgelegt:

$$\tilde{C}(0) = \frac{b_{C_1}}{b_{k_1}} \tilde{k}_0. \quad (8.14)$$

Das System ist nun vollständig bestimmt. Ein wichtiger Unterschied zwischen den Startwerten von  $C$  und  $k$  ist hier zu verdeutlichen.  $k(0)$  ist ein exogen vorgegebener Wert.  $C(0)$  hingegen ist eine Sprungvariable und passt sich (endogen) so an, dass ein Punkt auf der AA-Linie erreicht wird. Es gibt hier also genauso viele Sprungvariablen wie positive Eigenwerte. Hier deutet sich bereits ein allgemeines Prinzip an: Bei  $n$  positiven Eigenwerten werden  $n$  Sprungvariablen benötigt, um die divergierenden Pfade, die aus dem positiven Eigenwerten resultieren, auszusortieren. Diese Eigenschaft wird weiter unten noch hergeleitet.

Gleichungen (8.12) und (8.13) werden jetzt zu  $\tilde{C}(t) = \tilde{C}(0)e^{q_1 t}$  und  $\tilde{k}(t) = \tilde{k}(0)e^{q_1 t}$ . Umformen ergibt

$$C(t) = C^* + [C(0) - C^*]e^{q_1 t} \quad (8.15)$$

und

$$k(t) = k^* + [k(0) - k^*]e^{q_1 t}. \quad (8.16)$$

Die Steigung der AA-Linie ergibt sich folgendermaßen: (8.16) und (8.15) jeweils nach  $t$  abgeleitet, ergibt  $dk(t)/dt = q_1[k(0) - k^*]e^{q_1 t}$  und  $dC(t)/dt = q_1[C(0) - C^*]e^{q_1 t}$ . Teilen der zweiten Gleichung durch die erste führt zur gesuchten Steigung<sup>15</sup>

$$\frac{dC/dt}{dk/dt} = \frac{dC}{dk} = \frac{[C(0) - C^*]}{[k(0) - k^*]} = \frac{\tilde{C}(0)}{\tilde{k}(0)} = \frac{b_{C_1}}{b_{k_1}}.$$

$(b_{C_1}, b_{k_1})'$  ist der Eigenvektor, der zum negativen Eigenwert gehört. Die Steigung des stabilen Astes ist durch den Eigenvektor des negativen Eigenwertes gegeben.

Noch eine weitere Anmerkung zum Beispiel. Es gibt hier einen positiven und einen negativen Eigenwert, das System ist sattelpunktstabil. Was wäre aber, wenn

---

<sup>15</sup>Die Steigung wäre natürlich auch schon aus Gleichung (8.14) ersichtlich gewesen.

beide Eigenwerte positiv bzw. negativ wären? Bei zwei positiven Eigenwerten wäre das System instabil. Es gibt keine  $k$ - $C$ -Kombinationen, die in den Steady state führen. Bei zwei negativen Eigenwerten liegt dagegen absolute Stabilität des Systems vor. Egal, wo begonnen wird, landen die Variablen immer im Steady state. Dies hat allerdings einen Nachteil. Bei einem positiven und einem negativen Eigenwert wird, gegeben  $k(0)$ , immer genau ein  $C(0)$  bestimmt, das in den Steady state führt. Damit werden über die Ramsey-Regel alle folgenden Werte für  $C$  gleichzeitig auch mit festgelegt. Bei zwei negativen Eigenwerten gehören zu jedem  $k(0)$  aber unendlich viele  $C(0)$ , die alle in den Steady state führen. Das System ist also mathematisch stabil, aber unbestimmt!

Zum Abschluss wird für dieses einfache  $2 \times 2$ -System noch kurz gezeigt, dass die allgemeinen Lösungen (8.12) und (8.13) das Differentialgleichungssystem (8.9) und (8.10) tatsächlich erfüllen. Aus (8.12) folgt

$$\dot{C}(t) = q_1 A_1 b_{C_1} e^{q_1 t} + q_2 A_2 b_{C_2} e^{q_2 t}.$$

Einsetzen dieser Gleichung und von (8.13) in (8.9) und Umformen ergibt

$$A_1 e^{q_1 t} \left[ q_1 b_{C_1} - \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} b_{k_1} \right] + A_2 e^{q_2 t} \left[ q_2 b_{C_2} - \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} b_{k_2} \right] = 0. \quad (8.17)$$

Weil diese Gleichung für alle  $t$  gilt, müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern jeweils gleich null sein. Dies ist der Fall, wie eine Berechnung der Eigenvektoren zeigt. Aus (8.11) folgt

$$\begin{pmatrix} -q_1 & \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma} \\ -1 & \beta - q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{C_1} \\ b_{k_1} \end{pmatrix} = 0.$$

Weil beide Gleichungen dieses Systems linear abhängig sind<sup>16</sup>, wird  $b_{k_1}$  auf eins normiert und über die erste Zeile  $b_{C_1}$  bestimmt:  $b_{C_1} = f''(k^*)C^*/(\sigma q_1)$ . Für den zweiten Eigenvektor folgt entsprechend

$$\begin{pmatrix} b_{C_2} \\ b_{k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f''(k^*)C^*}{\sigma q_2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>16</sup> $q_1$  wurde dadurch berechnet, dass die Determinante der Jacobi-Matrix gleich null gesetzt wurde. Dies bedeutet gleichzeitig, dass die Gleichungen linear abhängig sind (siehe Chiang (1984, Kapitel 5.3)).

Einsetzen in (8.17) zeigt, dass die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden. Für die andere Lösung, (8.13), gilt Entsprechendes. Die gefundenen allgemeinen Lösungen erfüllen damit das Differentialgleichungssystem.

Damit schließlich zum allgemeinen Fall.

#### 8.1.4 Der allgemeine Fall: $n \times n$ -Systeme

Gegeben sei ein  $n \times n$ -System von Differentialgleichungen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \mathbf{x}$ . Durch Probieren einer Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{b}e^{qt}$  folgt (mit  $\mathbf{I}$  als Einheitsmatrix)

$$(\mathbf{J} - q\mathbf{I})\mathbf{b} = 0. \quad (8.18)$$

Aus der charakteristischen Gleichung  $\text{Det}(\mathbf{J} - q\mathbf{I}) = 0$  erhält man  $n$  Eigenwerte, die möglicherweise komplexe Zahlen sind:  $q_1, q_2, \dots, q_n$  und  $n$  spezielle Lösungen  $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{b}_i e^{q_i t}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Damit ergibt sich eine allgemeine Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{b}_i e^{q_i t},$$

mit  $A_i$  als beliebigen Konstanten. Zum Startzeitpunkt,  $t = 0$ , gilt

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{b}_i. \quad (8.19)$$

Die Eigenvektoren werden über Gleichung (8.18) und die Eigenwerte bestimmt. Damit bleiben die  $A_i$ 's und die  $x_i(0)$ 's, die nicht als Anfangsbestand exogen gegeben sind, mit den  $n$  Gleichungen aus (8.19) zu bestimmen. Die Anzahl zu bestimmender  $x_i(0)$ , abgekürzt als  $\#(x_i)$ , entspricht  $n$  minus der Anzahl an Zustandsvariablen. Dies ist gleich der Anzahl an Sprungvariablen:

$$\#(x_i) = n - \#(\text{Zust.var.}) = \#(\text{Sprungvar.}).$$

Damit das System konvergiert, müssen alle Terme mit positivem Eigenwert eliminiert werden. Es müssen also genauso viele  $A_i$ 's gleich null gesetzt werden, wie es positive Eigenwerte gibt. Damit verbleibt eine Anzahl zu bestimmender  $A_i$ 's, abgekürzt als  $\#(A_i)$ , in Höhe von  $n$  minus der Anzahl positiver Eigenwerte:

$$\#(A_i) = n - \#(\text{pos.EW}).$$

Die Gesamtzahl zu bestimmender Variablen und Konstanten ist die Anzahl zu bestimmender  $A_i$ 's und die Anzahl zu bestimmender  $x_i(0)$ 's und muss gleich

$n$  sein (weil in (8.19)  $n$  Gleichungen gegeben sind), wenn das System eindeutig bestimmt sein soll:  $\#(x_i) + \#(A_i) = n$ . Daraus folgt schließlich, dass die Anzahl an Sprungvariablen gleich der Anzahl positiver Eigenwerte sein muss:

$$\#(x_i) + \#(A_i) = \#(\text{Sprungvar.}) + n - \#(\text{pos.EW}) = n,$$

$$\#(\text{Sprungvar.}) = \#(\text{pos.EW}).$$

Wären weniger Sprungvariablen als positive Eigenwerte vorhanden, dann wäre das System instabil. Bei mehr Sprungvariablen als positiven Eigenwerten wäre das System stabil, aber indeterminiert.

Mit den hier vorgestellten Verfahren kann jetzt die Stabilität des Romer-Qualitäten-Modells aus dem letzten Kapitel untersucht werden.<sup>17</sup>

## 8.2 Stabilität im Romer-Qualitäten-Modell

### 8.2.1 Einleitung

Es gibt eine breite Literatur, welche die Dynamik des Romer-Modells untersucht. Das ursprüngliche Modell von Romer (1990a) beschränkte sich nur auf Steady states. In Arnold (2000a) wird für die Umgebung um einen Steady state gezeigt, dass der Steady state des Marktgleichgewichts ein Sattelpunkt ist. Garcia-Castrillo & Sanso (2002) untersuchen die Dynamik des Marktgleichgewichts global. Ebenfalls global zeigt Arnold (2000b), dass auch der Steady state eines optimalen Wachstumspfades ein Sattelpunkt ist. Benhabib, Perli & Xie (1994) fügen komplementäre Zwischengüter in das Romer-Modell ein und verweisen auf die Möglichkeit von Indeterminiertheit im Marktgleichgewicht. Mit numerischen Beispielen zeigen Asada, Semmler & Novak (1998), dass die Erweiterung von Benhabib et al. (1994) zu einer Hopf-Bifurkation führen kann.<sup>18</sup> In einer anderen Variante des Modells mit physischem Kapital als Input in Forschung ist dies ebenfalls möglich. Für das Jones-Modell (Jones 1995b, siehe Kapitel 3) zeigt Arnold (2006), dass der Steady state des Marktgleichgewichts ebenfalls ein Sattelpunkt ist. Schließlich kommen Devereux & Lapham (1994) zu dem Ergebnis, dass die

<sup>17</sup>Der folgende Abschnitt basiert auf Arnold & Kornprobst (2006) und Arnold & Kornprobst (2007).

<sup>18</sup>Durch eine Änderung der Modellparameter kann sich die Dynamik des Modells in einer ganz bestimmten Weise ändern.

Zwei-Länder-Version des Romer-Modells (siehe Rivera-Batiz & Romer (1991)) ohne internationale Wissens-Spillover instabil ist.

Im Folgenden werden zunächst die Gleichungen, die das Marktgleichgewicht bestimmen, hergeleitet. Nach der Berechnung der Steady-state-Werte wird die komparative Statik und die Dynamik des Modells analysiert. Die Variante des Modells mit semi-endogenem Wachstum aus Abschnitt 7.5 wird allerdings ausgeklammert.

### 8.2.2 Marktgleichgewicht

Die Dynamik und das Gleichgewicht des Modells lassen sich durch drei Differentialgleichungen ausdrücken. Dazu werden drei neue Variablen definiert:  $\chi \equiv cL/K$ ,  $z \equiv Y/K$  und  $\nu \equiv Y/P_A$ .

Aus der Produktionsfunktion  $Y = L_Y^{1-\alpha} \left( \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha$  erhält man durch entsprechende Umformungen

$$Y = L_Y^{1-\alpha} K^\alpha \left( \frac{\Delta}{\eta} \right)^\alpha, \quad (8.20)$$

wobei  $\Delta \equiv \exp \left( \int_0^1 \Omega(j) dj \ln \lambda \right)$  einen Technologie-Indikator darstellt und nur die beste Qualität,  $\Omega(j)$ , jeder Produktlinie verwendet wird.

Zunächst sind die drei Bewegungsgleichungen für  $\chi$ ,  $z$  und  $\nu$  zu bestimmen.

#### Herleitung von $\dot{\chi}$

Die Wachstumsrate von  $\chi$  lässt sich ausdrücken als

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{r - \rho}{\sigma} - z + \chi, \quad (8.21)$$

wobei  $\dot{c}/c$  durch  $(r - \rho)/\sigma$  ersetzt wurde und  $\dot{K}/K$  durch  $(Y - cL)/K = z - \chi$ . Der letzte Zusammenhang gilt, weil Kapital nicht abgeschrieben wird. Die Bevölkerungsgröße bleibt annahmegemäß konstant,  $\dot{L}/L = 0$ .

Der Zinssatz  $r$  ist endogen und noch zu ersetzen. Aus der Preissetzungsbedingung der Monopolisten  $p = \lambda \eta r$  und der Nullgewinnbedingung im Endproduktsektor  $px = Y - wL_Y = Y - (1 - \alpha)Y = \alpha Y$  folgt  $\lambda \eta r = \alpha Y/x$ .<sup>19</sup> Der aggregierte

<sup>19</sup>Weil nur beste Qualitäten hergestellt werden und der Preis für alle Kapitalgüter gleich ist, folgt, dass auch die nachgefragte Menge gleich ist:  $x_{\Omega(j)}(j) = \alpha Y/p = x$ .

Kapitalstock besteht aus dem Kapital der einzelnen Sektoren, dieses aus den akkumulierten Kapitalgütern:  $K \equiv \int_0^1 K(j) dj = \int_0^1 \eta x(j) dj = \eta x$ . Umformen ergibt  $x = K/\eta$ . Der Zinssatz beträgt damit  $r = \alpha z/\lambda$ . Einsetzen in (8.21) ergibt

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \chi - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda\sigma}\right) z - \frac{\rho}{\sigma}. \quad (8.22)$$

### Herleitung von $\dot{z}$

Die Gewinne der Monopolisten betragen  $\pi = \alpha(1 - 1/\lambda)Y$ . Diesen Ausdruck und den für den Zinssatz,  $r$ , in die Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt,  $rP_A = \pi + \dot{P}_A - IP_A$ , eingesetzt und umgeformt, ergibt

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = \frac{\alpha}{\lambda} z + I - \frac{\alpha}{\lambda}(\lambda - 1)\nu. \quad (8.23)$$

Einsetzen der Bedingung erster Ordnung (für den Arbeitseinsatz) im Endproduktsektor,  $w = (1 - \alpha)Y/L_Y$ , in die free-entry Bedingung im Forschungssektor,  $P_A = aw$  liefert

$$P_A = \frac{a(1 - \alpha)Y}{L_Y}. \quad (8.24)$$

$Y/L_Y$  lässt sich auch als  $(\Delta/\eta z)^{\alpha/(1-\alpha)}$  schreiben.<sup>20</sup> Mit  $\dot{\Delta}/\Delta = I \ln \lambda$  folgt

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I \ln \lambda - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\dot{z}}{z}. \quad (8.25)$$

Aus (8.24) ergibt sich

$$L_Y = a(1 - \alpha)\nu. \quad (8.26)$$

Gleichsetzen von (8.23) und (8.25) und Einsetzen von  $I = (L - L_Y)/a$  und (8.26) ergibt die Bewegungsgleichung für  $z$ :

$$\frac{\dot{z}}{z} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \lambda - 1 \right) \frac{L}{a} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda \right) \nu - \frac{\alpha}{\lambda} z \right]. \quad (8.27)$$

---

<sup>20</sup>Aus (8.20) folgt:

$$\frac{Y}{L_Y} = \left( \frac{\Delta K}{\eta L_Y} \right)^\alpha = \left( \frac{\Delta K \eta^\alpha}{\eta L_Y^{1-\alpha} K^\alpha \Delta^\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left( \frac{\Delta K}{\eta Y} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left( \frac{\Delta}{\eta z} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

**Herleitung von  $\dot{\nu}$** 

Schließlich muss noch die Bewegungsgleichung für  $\nu$  hergeleitet werden. Aus  $z = Y/K = (L_Y/K)^{1-\alpha}(\Delta/\eta)^\alpha$  folgt  $\dot{z}/z = (1-\alpha)(\dot{L}_Y/L_Y - \dot{K}/K) + \alpha\dot{\Delta}/\Delta$ . Auflösen nach  $L_Y$ :

$$\frac{\dot{L}_Y}{L_Y} = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{\dot{z}}{z} - \alpha \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \right) + \frac{\dot{K}}{K}.$$

Durch Einsetzen von  $\dot{K}/K = z - \chi$ ,  $\dot{\Delta}/\Delta = I \ln \lambda$ ,  $I = (L - L_Y)/a$ , (8.26) (woraus auch  $\dot{L}_Y/L_Y = \dot{\nu}/\nu$  folgt) und (8.27) erhält man nach einigen Umformungen die gesuchte Gleichung für  $\dot{\nu}$ :

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = \left( \ln \lambda - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{L}{a} + \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\lambda} - (1-\alpha) \ln \lambda \right] \nu + \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) z - \chi. \quad (8.28)$$

Die nicht-linearen Gleichungen (8.22), (8.27) und (8.28) beschreiben die Dynamik des gesamten Modells. Mit gegebenen Anfangswerten von  $K(0)$  und  $\Delta(0)$  legen Gleichungen (8.22), (8.27) und (8.28) die Entwicklung der Ökonomie in der Zeit fest: (8.22) bestimmt  $c (= \chi K)$ , (8.27) legt  $Y (= zK)$  fest, und (8.28) liefert  $L_Y (= a(1-\alpha)\nu)$ ,  $L_A (= L - L_Y)$  und  $I (= L_A/a)$ . Dadurch wird wiederum die Entwicklung des Kapitalstocks,  $K$ , und des Technologie-Indikators,  $\Delta$ , bestimmt (weil  $\dot{K} = Y - c$  und  $\dot{\Delta}/\Delta = I \ln \lambda$ ). Schließlich ergeben sich die Preise über  $r = \alpha z/\lambda$ ,  $w = (1-\alpha)Y/L_Y$  und  $P_A = wa$ .

**8.2.3 Steady state**

Der Steady-state-Wert einer Variable  $y$  wird abgekürzt mit  $y^*$ .  $(\chi^*, z^*, \nu^*)'$  stellt dann einen Steady state des Modells mit positivem Wachstum dar, wenn  $(\chi, z, \nu)' = (\chi^*, z^*, \nu^*)'$  die Gleichungen (8.22), (8.27) und (8.28) löst,  $I^*$  positiv ist, die Transversalitätsbedingung des Nutzenmaximierungsproblems der Haushalte erfüllt ist, der Nutzen endlich ist und  $(\chi^*, z^*, \nu^*)' > \mathbf{0}$ . Weiter sei  $l \equiv L/a$  und  $\phi \equiv \rho/l$  definiert. Weil es die Rechnungen weiter unten enorm vereinfacht, werden außerdem folgende Ausdrücke definiert:<sup>21</sup>

$$\bar{\sigma} \equiv 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda}, \quad \bar{\phi} \equiv \frac{\alpha(\lambda - 1)}{\lambda(1 - \alpha)}, \quad \phi(\sigma) \equiv \frac{1 - \sigma}{1 - \bar{\sigma}} \bar{\phi}. \quad (8.29)$$

<sup>21</sup>Die Formel für  $\phi(\sigma)$  hier ist identisch mit der in (7.36).

Es gilt:  $\bar{\sigma} < 1$ ,  $\bar{\phi} > 0$  und  $\phi(\bar{\sigma}) = \bar{\phi}$ . Für die folgende Analyse wird es entscheidend sein, ob  $\bar{\sigma} < 0$  oder  $\bar{\sigma} > 0$  ist.

Im Steady state gilt  $g_c = g_K = g_Y = g_{P_A}$  (siehe Gleichung (7.23)), weshalb dann  $\dot{\chi}^* = \dot{z}^* = \dot{\nu}^* = 0$  gilt. Aus Gleichungen (8.22), (8.27) und (8.28) werden dann<sup>22</sup>

$$\chi^* = \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) + \phi - \bar{\phi} \right] \quad (8.30)$$

$$z^* = \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) \quad (8.31)$$

$$\nu^* = \frac{l}{\alpha \ln \lambda} \left[ \frac{\phi - \phi(\sigma)}{\sigma - \bar{\sigma}} + \frac{1}{1 - \bar{\sigma}} \right]. \quad (8.32)$$

Die Innovationsrate im Steady state erhält man aus Gleichung (8.32), den Definitionen in (8.29) und  $I^* = (L - L_Y^*)/a = l - (1 - \alpha)\nu^*$ :<sup>23</sup>

$$I^* = \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\lambda})l - (1 - \alpha)\rho}{(\sigma - \bar{\sigma})\alpha \ln \lambda} = l \frac{(1 - \alpha)(\bar{\phi} - \phi)}{\alpha(\ln \lambda)(\sigma - \bar{\sigma})}. \quad (8.33)$$

Aus der rechten Gleichung in (8.33) wird klar, dass  $I^*$  genau dann positiv ist, wenn  $\sigma > \bar{\sigma}$  und gleichzeitig  $\phi < \bar{\phi}$  oder wenn  $\sigma < \bar{\sigma}$  und gleichzeitig  $\phi > \bar{\phi}$ :  $I^* > 0$ , wenn

$$\begin{aligned} \phi < \bar{\phi} & \text{ für } \sigma > \bar{\sigma} \\ \phi > \bar{\phi} & \text{ für } \sigma < \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Aus Gleichung (8.20),  $\dot{\Delta}/\Delta = I \ln \lambda$ , Konstanz von  $L_Y^*$  und  $(\dot{K}/K)^* = (\dot{Y}/Y)^*$  folgt, dass die Wachstumsrate des Outputs im Steady state proportional ist zur Innovationsrate:

$$\left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)^* = \frac{\alpha \ln \lambda}{(1 - \alpha)} I^*.$$

$\chi$ ,  $z$  und  $\nu$  sind im Steady state konstant, und  $c$ ,  $K$  und  $P_A$  wachsen jeweils mit der gleichen Rate wie  $Y$ . Der Wertpapierbestand der Haushalte,  $B = K + P_A$ , wächst ebenfalls mit dieser Rate. Aus der Bedingung erster Ordnung des Nutzenmaximierung-Problems (siehe Gleichung (2.9)) erhält man durch logarithmisches Differenzieren  $\dot{\xi}/\xi = -\rho - \sigma\dot{c}/c$ . Aus der Transversalitätsbedingung,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t)B(t) = 0$ , folgt  $\dot{\xi}/\xi + \dot{B}/B < 0$ . Zusammen ergibt sich dann

$$\rho > (1 - \sigma) \left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)^* = \frac{(1 - \sigma)\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} I^*.$$

<sup>22</sup>Siehe Anhang.

<sup>23</sup>Siehe Anhang.



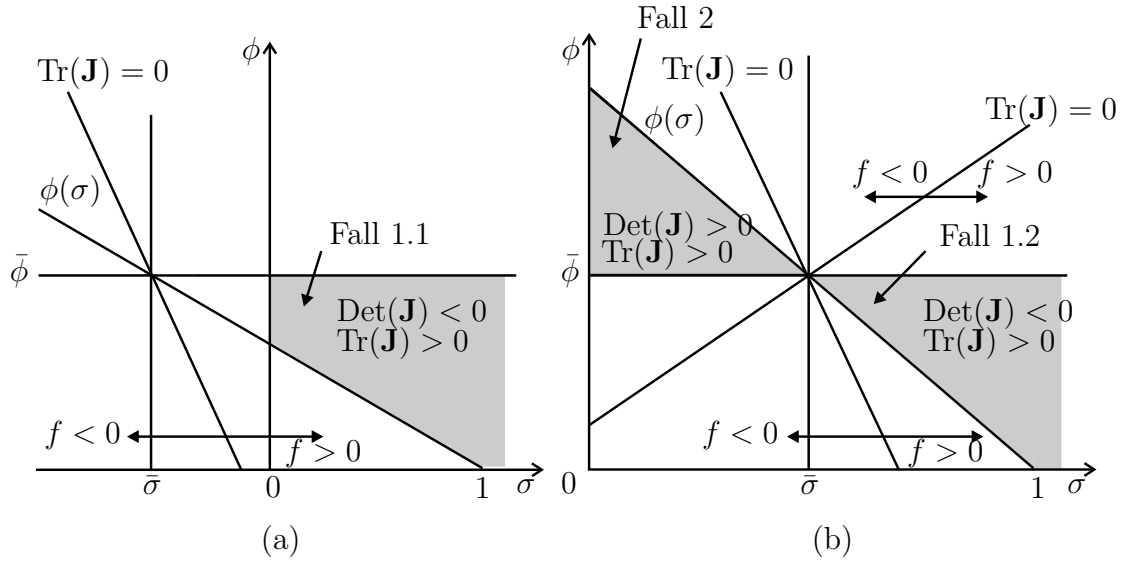


Abbildung 8.3: Zulässige Bereiche und Vorzeichen von Spur und Determinante der Jacobi-Matrix

Diese Bedingung ist auch notwendig und hinreichend für die Begrenztheit des Nutzenintegrals. Mit dem mittleren Ausdruck aus (8.33) verlangt die Transversalitätsbedingung<sup>24</sup>

$$\begin{aligned} \phi &> \phi(\sigma) \quad \text{für } \sigma > \bar{\sigma} \\ \phi &< \phi(\sigma) \quad \text{für } \sigma < \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (8.34) folgen daraus die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Steady states:

$$\begin{aligned} \sigma &> \bar{\sigma} \quad \text{und} \quad \phi(\sigma) < \phi < \bar{\phi} \quad (\text{Fall 1}) \\ \sigma &< \bar{\sigma} \quad \text{und} \quad \phi(\sigma) > \phi > \bar{\phi} \quad (\text{Fall 2}). \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass die Bedingungen aus den Fällen 1 und 2 für die Existenz eines Steady states auch hinreichend sind, muss gezeigt werden, dass  $(\chi^*, z^*, \nu^*)' > \mathbf{0}$  in beiden Fällen gilt. Es gilt folgender Zusammenhang:<sup>25</sup>

$$\phi \bar{\sigma} - \bar{\phi} \sigma = \phi - \bar{\phi} - \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} [\phi - \phi(\sigma)]. \quad (8.35)$$

<sup>24</sup>Siehe Anhang.

<sup>25</sup>Siehe Anhang.

Aus dieser Gleichung folgt direkt, dass

$$0 > \phi - \bar{\phi} > \phi\bar{\sigma} - \bar{\phi}\sigma \quad (8.36)$$

in Fall 1 gilt und dass die umgekehrten Ungleichungen in Fall 2 gelten. Aus (8.36) ergibt sich dann

$$\frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) + \phi - \bar{\phi} > \frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) + \phi\bar{\sigma} - \bar{\phi}\sigma = \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) > 0 \quad (8.37)$$

in Fall 1, in Fall 2 drehen sich die Ungleichheitszeichen wieder um. Aus (8.30) und (8.37) und weil in Fall 1  $\sigma > \bar{\sigma}$  ist, folgt  $\chi^* > 0$ . Für Fall 2 (mit  $\sigma < \bar{\sigma}$ ) folgt aus (8.30) und (8.37) (mit umgedrehten Ungleichheitszeichen) ebenfalls  $\chi^* > 0$ . Für  $z^*$  ergibt sich aus (8.31) und (8.36)  $z^* > 0$  (für Fall 1 und Fall 2). Und schließlich folgt aus (8.32), weil  $\phi - \phi(\sigma)$  und  $\sigma - \bar{\sigma}$  das gleiche Vorzeichen haben in den zulässigen Bereichen, und  $\bar{\sigma} < 1$ , dass auch  $\nu^* > 0$  ist. Damit folgt:

**Theorem 1:** *Ein Steady state existiert genau dann, wenn  $\sigma > \bar{\sigma}$  ist und  $\phi(\sigma) < \phi < \bar{\phi}$  (Fall 1) oder wenn  $\sigma < \bar{\sigma}$  und  $\bar{\phi} < \phi < \phi(\sigma)$  ist (Fall 2).*

Die zulässigen Parameterbereiche sind in Abbildung 8.3 durch die grau hinterlegten Flächen veranschaulicht, wobei Fall 1 in Fall 1.1 mit  $\bar{\sigma} < 0$  und Fall 1.2 mit  $0 < \bar{\sigma} < \sigma$  unterteilt ist.

## 8.2.4 Komparative Statik

Die Steady states des Romer-Modells (Romer 1990a) und des Modells von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4, 1991b) haben eine „normale“ komparative Statik.<sup>26</sup> Beispielsweise erhöht eine geringere Diskontierung,  $\rho$ , oder eine höhere Forschungsproduktivität,  $a$ , die langfristige Wachstumsrate,  $\dot{Y}/Y$ . Interessanterweise können Steady states des Romer-Modells mit Qualitätsverbesserungen à la Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4, 1991b) „verdrehte“ komparativ-statische Eigenschaften haben: aus dem mittleren Ausdruck in (8.33) wird klar, dass in Fall 2 die Innovationsrate im Steady state,  $I^*$ , und damit die Wachstumsrate zunimmt, wenn  $l$  fällt oder  $\rho$  steigt.

<sup>26</sup>Bei Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4, 1991b) hängt es nicht davon ab, dass sie logarithmischen Nutzen unterstellen. Mit einer CIES-Nutzenfunktion beträgt die Innovationsrate im Steady state  $I^* = [(\lambda - 1)l - \rho] / [\lambda - (1 - \sigma) \ln \lambda]$ . Weil der Nenner positiv ist ( $\lambda > 1 + \ln \lambda > (1 - \sigma) \ln \lambda$ ), muss der Zähler in einem Steady state mit  $I^* > 0$  auch positiv sein, so dass  $I^*$  zunimmt wenn  $l$  steigt oder  $\rho$  fällt.

Um die komparative Statik des Modells zu erklären, wird analog zu Barro & Sala-i-Martin (2004, Abbildung 7.3, S. 330) ein Diagramm mit zwei Kurven konstruiert. Eine Kurve, die CG-Linie (für „consumption growth“), gibt die von den Konsumenten gewünschte Innovationsrate im Steady state,  $I^*$ , in Abhängigkeit vom Zinssatz,  $r^*$ , an. Die andere, die PG-Linie (für „production growth“), gibt die Innovationsrate im Steady state an, die vom Produktionssektor erbracht wird, auch in Abhängigkeit vom Zinssatz,  $r^*$ . Beide sind in Abbildung 8.4 dargestellt. Der gleichgewichtige Zinssatz und die gleichgewichtige Innovationsrate im Steady state ergeben sich im Schnittpunkt beider Linien.

Für die Konsumseite ergibt  $(\dot{c}/c)^* = (\dot{Y}/Y)^* = \alpha I^*(\ln \lambda)/(1 - \alpha)$  zusammen mit der Ramsey-Regel in einem Steady state:

$$I^* = \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} \frac{r^* - \rho}{\sigma}. \quad (8.38)$$

Dies ist die Gerade CG in Abbildung 8.4. Wie üblich bewirkt ein höherer Zinssatz, dass die Haushalte ein steileres Konsumprofil wählen.

Der Grund für die ungewöhnliche komparative Statik liegt darin, dass die PG-Linie auch steigend verlaufen kann. Das bedeutet, dass im Gleichgewicht *Unternehmen mehr Innovation betreiben, wenn die Zinsen steigen*.

Um das zu sehen wird der Patentwert relativ zum Output im Steady state folgendermaßen geschrieben:<sup>27</sup>

$$\left(\frac{P_A}{Y}\right)^* = \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{r^* + I^* - \frac{\alpha}{1-\alpha}(\ln \lambda)I^*}. \quad (8.39)$$

Durch stärkere Diskontierung mindert ein Zinsanstieg den Wert einer Innovation. Ein Anstieg der Innovationsrate,  $I^*$ , hat zwei Effekte auf den Patentwert: Zum einen wird letzterer gemindert, weil es wahrscheinlicher wird, von einem Konkurrenten ersetzt zu werden. Das Patent wird dann wertlos. Eine Zunahme der Innovationsrate ist wie eine zusätzliche Diskontierung (der „creative-destruction“-Effekt). Zum anderen bewirkt ein höheres  $I^*$ , dass der aggregierte Output,  $Y$ , und die Gewinne,  $\pi = \alpha(1 - 1/\lambda)Y$ , schneller wachsen. Dadurch steigt  $(P_A/Y)^*$  (der „market-size“-Effekt).<sup>28</sup>

<sup>27</sup>Siehe Anhang.

<sup>28</sup>Der „market-size“-Effekt überwiegt den „creative-destruction“-Effekt genau dann, wenn  $1 < \alpha(\ln \lambda)/(1 - \alpha)$ . Mit den Definitionen von  $\bar{\sigma}$  und  $\bar{\phi}$  aus (8.29) ist dies gleichbedeutend mit  $\bar{\sigma} > -\bar{\phi}$ .

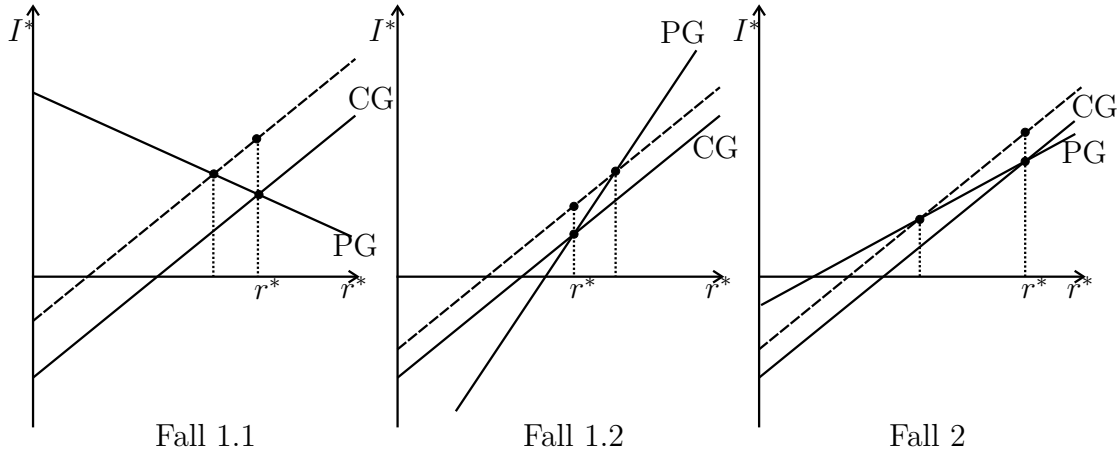


Abbildung 8.4: Komparative Statik

Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt, die Forschungstechnologie, die Nachfrage nach Arbeit im Endproduktsektor, freier Marktzutritt in F&E und Gleichung (8.39) ergeben in einem Steady state<sup>29</sup>

$$\frac{L}{a} = I^* + (1 - \alpha) \left( \frac{Y}{P_A} \right)^* = I^* + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left[ r^* + \left( 1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \lambda \right) I^* \right]. \quad (8.40)$$

Gleichung (8.40) ist als die PG-Linie in Abbildung 8.4 dargestellt. Ein Anstieg des Zinssatzes,  $r^*$ , erhöht die Nachfrage nach Arbeit im Endproduktsektor. Grund ist, dass der Wert einer Innovation und damit – über die free-entry Bedingung in F&E – der Lohnsatz fällt. Entscheidend ist, dass bei einem gegebenen Zinssatz *ein Anstieg der Innovationsrate einen Rückgang der aggregierten Arbeitsnachfrage bewirkt, wenn der „market-size“-Effekt hinreichend groß ist*. Das ist genau dann der Fall, wenn die rechte Gleichung in (8.40) in  $I^*$  fällt. Dies gilt wiederum genau dann, wenn  $\bar{\sigma} > 0$  (d.h., in Fall 1.2 und Fall 2).

Oder anders ausgedrückt: Ein Anstieg von  $I^*$  benötigt eine höhere Beschäftigung in F&E. Wenn  $\bar{\sigma} > 0$  gilt, dann ist der „market-size“-Effekt hinreichend stark, dass der Wert einer Innovation und damit der Lohnsatz so stark ansteigen, dass der folgende Rückgang der Arbeitsnachfrage aus dem Endproduktsektor die gestiegene Nachfrage aus F&E mehr als ausgleicht.<sup>30</sup> Deshalb ist bei einem Anstieg des Zinssatzes, der eine Übernachfrage nach Arbeit auslöst, ein Anstieg von

<sup>29</sup>Die Herleitung und zusätzliche Erläuterungen zur komparativen Statik finden sich im Anhang.

<sup>30</sup>Dies kann weder im Romer-Modell noch in dem von Grossman and Helpman passieren. Bei Romer ist die analoge Gleichung zu (8.40):  $L/a = r^*/\alpha + (\dot{A}/A)^*$ , wobei  $A$  die Anzahl der

$I^*$  nötig, um den ursprünglichen Effekt wieder auszugleichen und den Arbeitsmarkt ins Gleichgewicht zu bringen. Die PG-Linie verläuft damit ansteigend. Ein Vergleich von (8.38) mit (8.40) zeigt, dass, wenn die PG-Linie ansteigend verläuft (d.h., wenn  $\bar{\sigma} > 0$ ), sie dann entweder steiler oder flacher als die CG-Linie ist. Dies hängt davon ab, ob  $\sigma > \bar{\sigma}$  (in Fall 1.2) oder  $\sigma < \bar{\sigma}$  (in Fall 2) gilt. Der fallende Zusammenhang zwischen  $r^*$  und  $I^*$  ergibt sich nur, wenn  $\bar{\sigma} < 0$  (in Fall 1.1).

Nun können die komparativ-statistischen Eigenschaften anhand von Abbildung 8.4 hergeleitet werden. Die linke Grafik in Abbildung 8.4 stellt den Fall 1.1 dar ( $\bar{\sigma} < 0$ ): die PG-Linie verläuft fallend. Wenn der Zinssatz den Steady-state-Wert übersteigt, dann ist die von den Haushalten gewünschte Wachstumsrate größer als die aus dem Unternehmenssektor mittels Forschung hervorgebrachte (die CG-Linie ist oberhalb der PG-Linie). Ein Rückgang des Zinssatzes mindert das Konsumwachstum und erhöht die Innovationsanreize, wodurch ein Gleichgewicht erreicht wird. Angenommen, die Diskontrate,  $\rho$ , fällt, ausgehend von einem Steady state (die durchgezogenen Linien in Abbildung 8.4). Aus (8.38) wird ersichtlich, dass die CG-Linie sich nach oben verschiebt (die gestrichelte Linie in der Abbildung). Beim ursprünglichen Zinssatz liegt die CG-Linie nun über der PG-Linie. Durch ein Fallen des Zinses und einen Anstieg der Innovationsrate wird ein neues Gleichgewicht erreicht. Ähnlich wirkt ein Anstieg von  $L/a$ : Die PG-Linie verschiebt sich nach rechts, wodurch der Zinssatz und die Innovationsrate ansteigen, bis das neue Gleichgewicht erreicht ist.

Als nächstes zu Fall 2 ( $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ ): die PG-Linie verläuft steigend, ist aber flacher als die CG-Linie (die rechte Grafik in Abbildung 8.4). Wie im Fall 1.1 liegt die CG-Linie oberhalb der PG-Linie für Zinssätze über dem Steady-state-Zins. Um ein Gleichgewicht herzustellen, muss der Zinssatz also fallen. Das bedeutet, dass der Patentwert und damit der Lohnsatz steigt, wodurch die Nachfrage nach Arbeit sinkt. Um die aggregierte Arbeitsnachfrage zu erhöhen, ist aber (im Gegensatz zu Fall 1.1) nicht ein Anstieg der F&E-Beschäftigung nötig, sondern ein Rückgang. Die gesunkenen Zinsen bedeuten also eine niedrigere Innovationsrate. Weil der Rückgang des Zinssatzes stärker auf die CG-Linie wirkt als auf die

---

Zwischengüter ist. Eine höhere Beschäftigung in F&E (d.h. ein Anstieg von  $(\dot{A}/A)^*$ ) erhöht die aggregierte Arbeitsnachfrage im gleichen Ausmaß. Bei Grossman and Helpman ist die analoge Gleichung zu (8.40):  $L/a = [r^* + (\lambda - \ln \lambda)I^*]/(\lambda - 1)$ . Es gibt zwar den „market-size“-Effekt, aber er kann nie stark genug sein, dass die aggregierte Arbeitsnachfrage negativ von der Innovationsrate,  $I^*$ , abhängig wird, weil  $\lambda > \ln \lambda$  immer gilt.

PG-Linie, wird ein neues Gleichgewicht erreicht. Angenommen, dass, ausgehend von einem Steady state (die durchgezogene Linie in der rechten Grafik von Abbildung 8.4),  $\rho$  fällt. Wie in Fall 1.1 verschiebt sich die CG-Linie nach oben. Beim alten Zinssatz ist die CG-Linie über der PG-Linie (die gestrichelte Linie in der Abbildung). Im Gegensatz zum Fall 1 bewirkt das einen Rückgang der Innovationsrate, wie gerade erklärt wurde. Analog führt ein Anstieg von  $L/a$  zu einem Rückgang der Zinsen und der Innovationsrate. Offensichtlich bewirkt der positive Zusammenhang zwischen Zins und Innovationsrate auf der Produktionsseite, wie er in Abbildung 8.4 durch die steigende PG-Kurve dargestellt ist, die „verdrehte“ Reaktion von  $I^*$  auf Änderungen von  $\rho$  und  $L/a$ .

Schließlich verbleibt noch der Fall 1.2 ( $0 < \bar{\sigma} < \sigma$ ) zu untersuchen. Die PG-Linie verläuft ansteigend und steiler als die CG-Linie (die mittlere Grafik in Abbildung 8.4). Ausgehend von einem Steady state soll die CG-Linie wieder nach oben verschoben werden, weil  $\rho$  fällt (die gestrichelte Linie in der Grafik). Beim alten Zins übersteigt die CG-Linie wieder die PG-Linie. Für ein neues Gleichgewicht müssen  $r^*$  und  $I^*$  steigen. Obwohl die komparative Statik in diesem Fall wieder „normal“ zu sein scheint, wenn man die Innovationsrate in Gleichung (8.33) betrachtet, bleibt der Zusammenhang zwischen Zins und Innovationsrate auf der Produktionsseite der Ökonomie positiv. Die Auswirkung einer Änderung der Diskontrate,  $\rho$ , auf den Zinssatz,  $r^*$ , ist anders, als man erwarten würde. Eine Zunahme von  $L/a$  verschiebt die PG-Linie nach rechts, wodurch der Zins und die Innovationsrate wieder erhöht wird.

Zur Veranschaulichung zwei Beispiele:

**Beispiel 1:** Sei  $\alpha = 0,4$  und  $\lambda = 1,2$ . Das impliziert  $\bar{\sigma} = -8,1414 < 0$ . Damit folgt  $\partial I^*/\partial l > 0 > \partial I^*/\partial \rho$ , wenn ein Steady state existiert. Sei außerdem  $\sigma = 2$ ,  $\rho = 0,02$  und  $l = 2,005$ . Wegen  $\phi(\sigma) = -0,012 < \phi = 0,010 < \bar{\phi} = 0,111$ , existiert gemäß Theorem 1 ein Steady state und Fall 1.1 liegt vor. Die Innovationsrate und die Wachstumsrate sind  $I^* = 0,1645$  bzw.  $(\dot{Y}/Y)^* = 2\%$ . Im Allgemeinen sind für dieses Modell Parameterkonstellationen aus Fall 1.1 sehr wahrscheinlich, wie numerische Versuche zeigen. Es ist allerdings nicht schwierig, Gegenbeispiele zu finden.

**Beispiel 2:** Sei  $\alpha = 0,8$ ,  $\lambda = 2,5$ ,  $l = 0,04$ ,  $\sigma = 0,002$  und  $\rho = 0,1$ . Es folgt  $\bar{\sigma} = 0,0723 > 0$  und  $\bar{\phi} = 2,4 < \phi = 2,5 < \phi(\sigma) = 2,5819$ . Es liegt eine Konstellation aus Fall 2 vor. Im Steady state ergeben sich  $r^* = 0,1001$ ,  $I^* = 0,0155$  und  $(\dot{Y}/Y)^* = 5,686\%$ . Eine Zunahme von  $\rho$  auf  $\rho = 0,101$  erhöht  $r^*$ ,  $I^*$  und  $(\dot{Y}/Y)^*$ .

auf  $r^* = 0,1011$ ,  $I^* = 0,0194$  und  $(\dot{Y}/Y)^* = 7,108\%$ . Die komparative Statik ist also „verdreht“.

Zusammenfassend in folgender Tabelle nochmal die komparative Statik für die unterschiedlichen Bereiche.

**Zusammenfassung der komparativ-statischen Effekte.**

	Fall 1.1	Fall 1.2	Fall 2
$I^* \uparrow$	Arbeitsnachfrage $\uparrow$	Arbeitsnachfrage $\downarrow$	Arbeitsnachfrage $\downarrow$
Steigung PG	$< 0$	$> \text{Steigung CG} > 0$	$> 0, < \text{Steigung CG}$
Zinssatz $> r^*$	CG $>$ PG	CG $<$ PG	CG $>$ PG
$\rho \downarrow$	$r^* \downarrow, I^* \uparrow$	$r^* \uparrow, I^* \uparrow$	$r^* \downarrow, I^* \downarrow$
$l \uparrow$	$r^* \uparrow, I^* \uparrow$	$r^* \uparrow, I^* \uparrow$	$r^* \downarrow, I^* \downarrow$

### 8.2.5 Dynamik

Der „market-size“-Effekt destabilisiert das System tendenziell. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, erhöht ein Zinsanstieg die Innovationsrate und den Wert einer Innovation, wodurch der Forschungsanreiz weiter erhöht wird (usw.), wenn der „market-size“-Effekt den „creative-destruction“-Effekt übersteigt (Fall 1.2 und Fall 2). Bezüglich der Modelldynamik außerhalb eines Steady states könnte man vermuten, dass Steady states in den Fällen 1.2 und 2 instabil sind. Andererseits ist auch eine andere Vermutung sehr nahe liegend: Weil sowohl im Romer-Modell als auch im Modell von Grossman und Helpman (1991a, Kapitel 4, 1991b) Steady states Sattelpunkte sind, könnte dies auch auf dieses Modell zutreffen.<sup>31</sup>

Im Folgenden wird aber gezeigt, dass ein Steady state in Fall 2 sowohl instabil oder auch indeterminiert sein kann. In Fall 1 (Fälle 1.1 und 1.2) liegt dagegen Sattelpunktstabilität vor. Es gilt:

**Theorem 2:** *Ein Steady state in Fall 1 ist ein Sattelpunkt, ein Steady state in Fall 2 ist instabil oder indeterminiert.*

<sup>31</sup>Wie im ursprünglichen Modell von Grossman und Helpman (1991a, Kapitel 4, 1991b) springt die Ökonomie auch im allgemeineren Fall mit einer CIES-Nutzenfunktion direkt in den Steady state, wie in Abschnitt 5.3 gezeigt wurde.

**Beweis:** Das System aus den Gleichungen (8.22), (8.27) und (8.28) mittels Taylor-Reihen-Approximation um den Steady state Linearisieren liefert<sup>32</sup>

$$\begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{z} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^* & -(1 - \frac{\alpha}{\lambda\sigma})\chi^* & 0 \\ 0 & -\frac{1-\alpha}{\lambda}z^* & -\bar{\sigma}(1-\alpha)(\ln \lambda)z^* \\ -\nu^* & (1 - \frac{1}{\lambda})\nu^* & (\alpha - \bar{\sigma})(\ln \lambda)\nu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi - \chi^* \\ z - z^* \\ \nu - \nu^* \end{pmatrix}. \quad (8.41)$$

Sei  $\mathbf{J}$  die Jacobi-Matrix im Gleichungssystem (8.41). Aus (8.41), den Definitionen in (8.29) und den Steady-state-Werten (8.30), (8.31) und (8.32) erhält man die Determinante und die Spur der Jacobi-Matrix<sup>33</sup>

$$\text{Det}(\mathbf{J}) = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sigma} (\ln \lambda) \chi^* z^* \nu^* \quad (8.42)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{J}) = \frac{l}{\alpha} \frac{f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)}{\sigma - \bar{\sigma}}, \quad (8.43)$$

mit

$$\begin{aligned} f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) &\equiv \left( \alpha + \lambda - 1 + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \right) [\phi(1 - \bar{\sigma}) - \bar{\phi}(1 - \sigma)] \\ &+ (\lambda - 1)(\bar{\phi} - \phi) + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}}(\sigma - \bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (8.44)$$

In Fall 1 ist  $\text{Det}(\mathbf{J}) < 0$ , weil  $\sigma > \bar{\sigma}$ . In Fall 2 gilt  $\text{Det}(\mathbf{J}) > 0$ , weil  $\sigma < \bar{\sigma}$ . Für gegebene Werte von  $\alpha$  und  $\lambda$  legt die Gleichung  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) = 0$  eine Gerade ( $\text{Tr}(\mathbf{J}) = 0$ ) im  $(\sigma, \phi)$ -Raum fest (siehe Abbildung 8.3). Auf dieser Geraden ist die Spur der Jacobi-Matrix gleich null. Die  $f(\bar{\sigma}, \bar{\phi}, \alpha, \lambda) = 0$ -Linie geht durch den Punkt  $(\bar{\sigma}, \bar{\phi})$ . Die partielle Ableitung von  $f$  nach  $\sigma$  ist positiv,<sup>34</sup> und das Vorzeichen der Spur und das des Ausdrucks  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)/(\sigma - \bar{\sigma})$  sind gleich. Daraus folgt, dass für  $\sigma > \bar{\sigma}$  die Spur,  $\text{Tr}(\mathbf{J})$ , rechts der Geraden positiv und links davon negativ ist. Für  $\sigma < \bar{\sigma}$  ist sie links der Geraden positiv und rechts davon negativ. Die  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) = 0$ -Gerade kann fallen oder steigen. Wenn sie fällt, dann fällt sie aber stärker als die  $\phi(\sigma)$ -Gerade, die in (8.29) definiert wurde (siehe Abbildung 8.3).<sup>35</sup> Daraus folgt, dass die Spur in den Fällen 1 und 2 positiv ist.

---

<sup>32</sup>Siehe Anhang.

<sup>33</sup>Siehe Anhang.

<sup>34</sup>Siehe Anhang.

<sup>35</sup>Siehe Anhang.



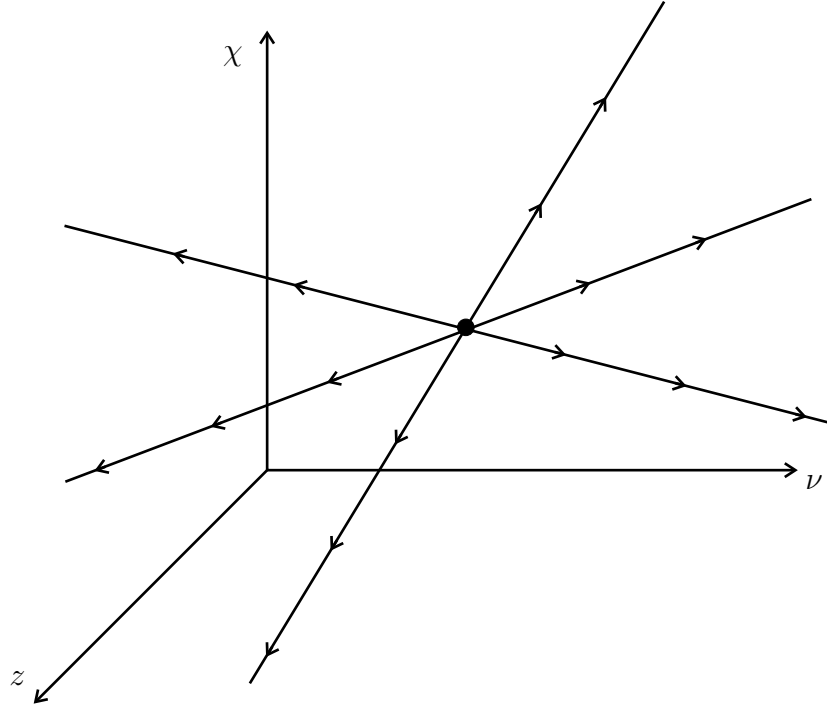


Abbildung 8.5: Null negative Eigenwerte: Instabilität

Aus dem Routh-Hurwitz-Theorem folgt, dass die Anzahl an negativen Eigenwerten gleich drei minus der Anzahl an Vorzeichenänderungen in folgendem Schema ist:<sup>36</sup>

$$-1 \parallel \text{Tr}(\mathbf{J}) \parallel -B(\mathbf{J}) + \text{Det}(\mathbf{J})/\text{Tr}(\mathbf{J}) \parallel \text{Det}(\mathbf{J}).$$

In Fall 1 gilt  $\text{Det}(\mathbf{J}) < 0$  und  $\text{Tr}(\mathbf{J}) > 0$ . Das Routh-Hurwitz Vorzeichenschema lautet deshalb  $- \parallel + \parallel ? \parallel -$ . Es gibt also, unabhängig vom Vorzeichen des dritten Elements, exakt einen negativen Eigenwert. Im Fall 2 ist  $\text{Det}(\mathbf{J}) > 0$  und  $\text{Tr}(\mathbf{J}) > 0$ . Das Vorzeichenschema ist  $- \parallel + \parallel ? \parallel +$  und die Anzahl negativer Eigenwerte entweder null oder zwei.

Keine der drei Variablen aus  $(\chi, z, \nu)'$  ist historisch vorgegeben. Aber aus

---

<sup>36</sup> $B(\mathbf{J})$  steht für

$$\left| \begin{array}{cc} -\frac{1-\alpha}{\lambda} z^* & -z^* \alpha \bar{\sigma} \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \lambda \\ (1 - \frac{1}{\lambda}) \nu^* & \nu^* (\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \chi^* & 0 \\ -\nu^* & \nu^* (\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \chi^* & -(1 - \frac{\alpha}{\lambda \bar{\sigma}}) \chi^* \\ 0 & -\frac{1-\alpha}{\lambda} z^* \end{array} \right|.$$

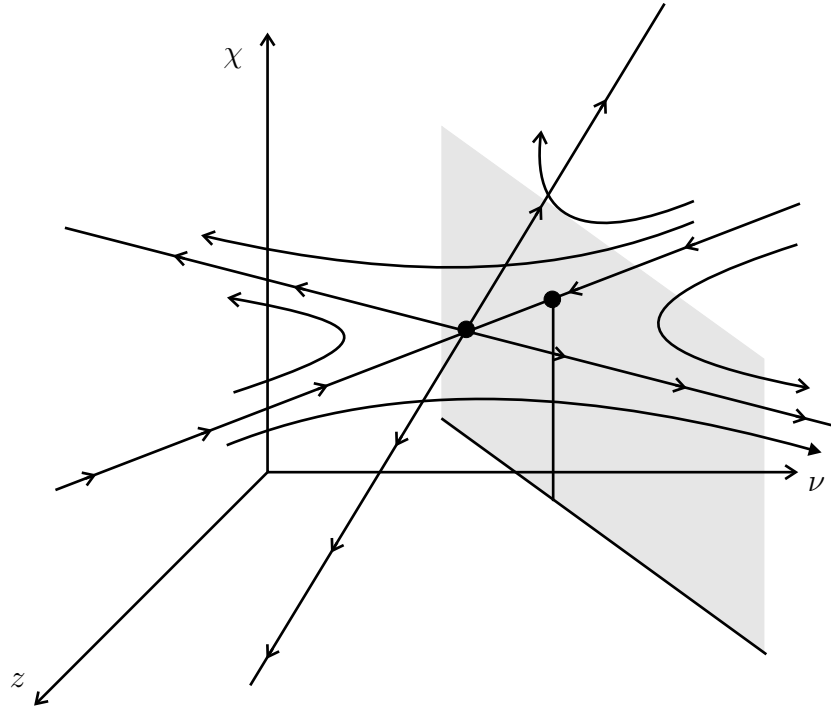


Abbildung 8.6: Ein negativer Eigenwert: Sattelpunktstabilität

$Y = L_Y^{1-\alpha}(\Delta K/\eta)^\alpha$ ,  $L_Y = a(1-\alpha)\nu$  und der Definition von  $z$  folgt

$$z = \frac{[a(1-\alpha)]^{1-\alpha}}{\eta^\alpha} \left( \frac{\Delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \nu}{K} \right)^{1-\alpha}.$$

Die zu Beginn gegebenen Werte von  $K(0) = K_0$  und  $\Delta(0) = \Delta_0$  legen damit ein Verhältnis von  $z(0)$  und  $\nu(0)$  fest (dieses Verhältnis ist in Abbildung 8.6 durch die graue Ebene gekennzeichnet). Damit folgt, dass null negative Eigenwerte Instabilität bedeuten (siehe Abbildung 8.5). Bei gegebener Relation von  $\nu$  zu  $z$  gibt es keine Möglichkeit, in den Steady state zu gelangen, es sei denn, die Ökonomie startet direkt im Steady state. In diesem Fall bleibt sie auch dort. Ein negativer Eigenwert bedeutet Sattelpunktstabilität (siehe Abbildung 8.6). Für einen gegebenen Wert von  $\nu/z$  existiert genau ein Wert von  $\chi$ , so dass der Steady state erreicht wird. Wie unten noch näher erläutert wird, sind damit sämtliche Preise und Mengen in der Ökonomie eindeutig bestimmt. Bei zwei negativen Eigenwerten liegt Indeterminiertheit vor (siehe Abbildung 8.7). Hier gibt es unendlich viele Werte für  $\chi$ , die alle in den Steady state führen und auf der grauen Ebene in Abbildung 8.7 liegen.

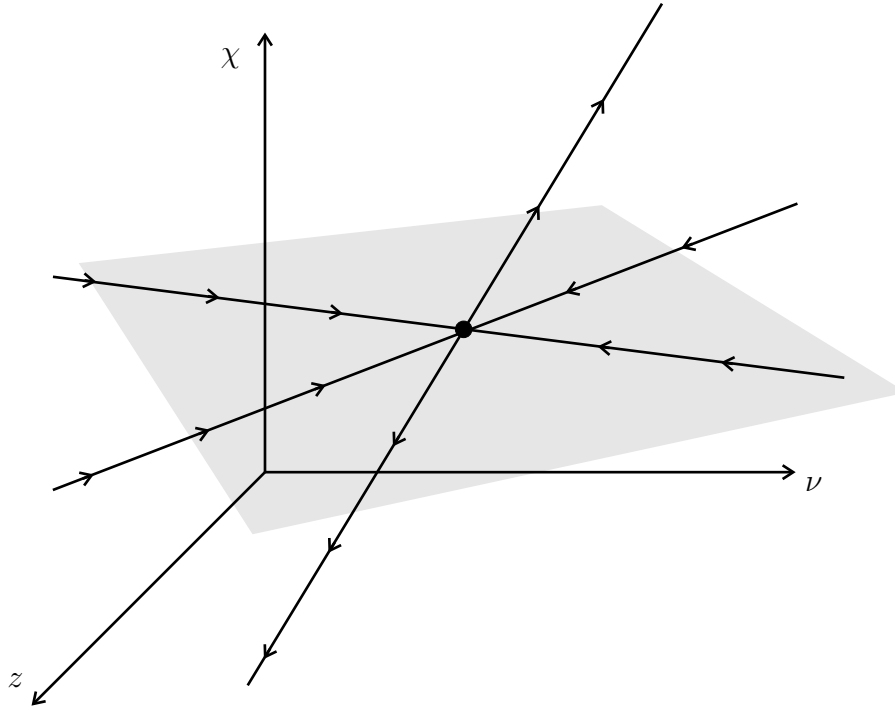


Abbildung 8.7: Zwei negative Eigenwerte: Indeterminiertheit

**Beispiel 1:** In diesem Beispiel sind die Eigenwerte  $q_0 = -0,0384$ ,  $q_1 = 0,0887$  und  $q_2 = 4,7966$ . Der Steady state ist deshalb ein Sattelpunkt (siehe Abbildung 8.6).

**Anmerkung 1:** Von Theorem 2 wird die Modelldynamik analytisch vollständig beschrieben. Man könnte sich fragen, ob eine der beiden Möglichkeiten in Fall 2, Instabilität oder Indeterminiertheit, ausgeschlossen werden kann. Es ist aber sehr einfach, numerische Beispiele für beide Fälle zu finden.

**Beispiel 3:** Sei  $\sigma = 0,01$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\lambda = 2,5$ ,  $l = 0,04$  und  $\rho = 0,1$ . Dann lauten die Eigenwerte  $q_{0/1} = 0,0001 \pm 0,1039i$  und  $q_2 = 0,2999$ . Der Steady state ist deshalb instabil.

Ausgehend von diesen Parameterwerten ergibt sich aus einem hinreichend hohen Anstieg von  $\phi$  ( $\equiv \rho/l$ ) oder einem Rückgang von  $\sigma$  Indeterminiertheit. Beispielsweise folgt mit  $\sigma = 0,002$  (Beispiel 2)  $q_{0/1} = -0,0460 \pm 0,2188i$  und  $q_2 = 0,4046$ . Ein Anstieg von  $\rho$  auf  $\rho = 0,101$  führt zu  $q_{0/1} = -0,0035 \pm 0,0946i$  und  $q_2 = 0,2799$ . In Abbildung 8.8 sind die beiden Bereiche mit Indeterminiertheit bzw. Instabilität dargestellt. Die fallende Gerade ist  $\phi(\sigma)$ , die horizontale Gerade ist  $\bar{\phi}$ . Die Kurve mit dem umgekehrt U-förmigen Verlauf gibt sämtliche Loki an,

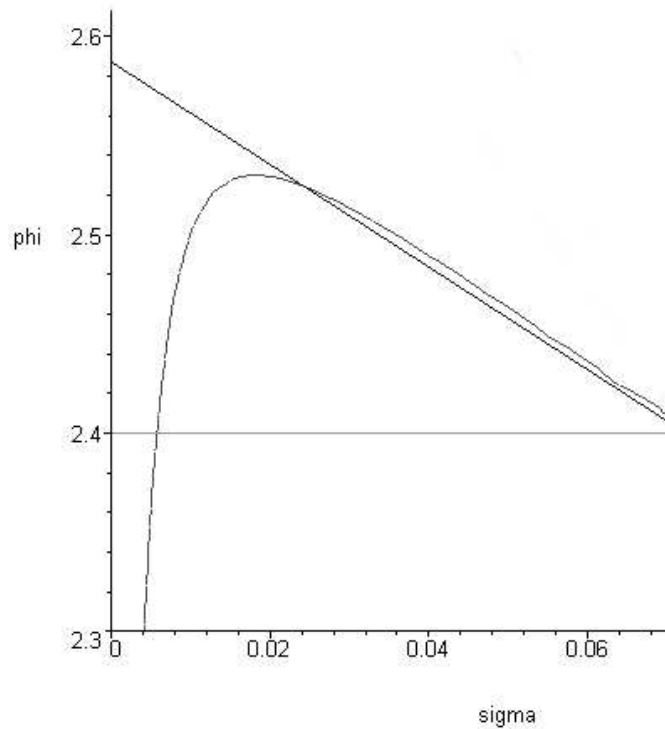


Abbildung 8.8: Bifurkation

bei denen das dritte Element im Routh-Hurwitz-Schema gleich null ist. Unterhalb der Kurve ist das dritte Element negativ, in diesem Bereich liegt Instabilität vor. Oberhalb der Kurve ist das dritte Element positiv, ein Anpassungspfad in einen Steady state ist damit unbestimmt.

**Anmerkung 2:** Wegen Beispiel 3 liegt die Vermutung nahe, dass bezüglich der Modelldynamik hier eine Hopf-Bifurkation vorliegt, wenn  $\sigma$  oder  $\phi$  bestimmte Grenzen überschreiten. In Beispiel 3 wird der Realteil des komplexen Eigenwertes,  $q_{0/1}$ , negativ, wenn  $\sigma$  unter die kritische Marke von  $\sigma = 0,0099$  sinkt. In Abbildung 8.8 kommt es beim Überschreiten der umgekehrt U-förmigen Kurve zu einer Bifurkation.

**Anmerkung 3:** Weil in Fall 2 Indeterminiertheit vorliegen kann, ist bewiesen, dass Steady states mit der „verdrehten“ komparativen Statik auch erreicht werden können. In Beispiel 2 führt eine stabile Mannigfaltigkeit in den Steady state.

### 8.2.6 Bestimmung der Startwerte

Keine der drei Variablen  $\chi$ ,  $z$  und  $\nu$  ist in  $t = 0$  historisch gegeben. Dennoch können eindeutige Startwerte ermittelt werden. Auswerten der Variablen  $z = [a(1 - \alpha)]^{1-\alpha} (\Delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \nu / K)^{1-\alpha} / \eta^\alpha$  in  $t = 0$  und im Steady state ergibt

$$z(0) - z^* = \frac{[a(1 - \alpha)]^{1-\alpha}}{\eta^\alpha} \left\{ \left[ \frac{\Delta(0)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{K(0)} \nu(0) \right]^{1-\alpha} - \left[ \left( \frac{\Delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{K} \right)^* \nu^* \right]^{1-\alpha} \right\}. \quad (8.45)$$

Zu jedem Eigenwert  $q_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) gehört eine spezielle Lösung  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* = \mathbf{b}_i e^{q_i t}$ , für die  $\dot{\mathbf{x}} = q_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  folgt. Der Vektor  $\mathbf{b}_i = (b_{\chi i}, b_{z i}, b_{\nu i})'$  ist der Eigenvektor, der zum Eigenwert  $q_i$  gehört. Zusammen mit  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  ergibt sich  $(\mathbf{J} - q_i \mathbf{I})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*] = 0$ , wobei  $\mathbf{I}$  die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix ist. Einsetzen von  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* = \mathbf{b}_i e^{q_i t}$  und Auswerten bei  $t = 0$  liefert  $(\mathbf{J} - q_i \mathbf{I})\mathbf{b}_i = 0$ , wodurch der Eigenvektor  $\mathbf{b}_i$  bestimmt wird. Beispielsweise lautet die zweite Zeile in diesem Gleichungssystem für  $i = 0$

$$\left( -\frac{1 - \alpha}{\lambda} z^* - q_0 \right) b_{z0} - \bar{\sigma}(1 - \alpha)(\ln \lambda) z^* b_{\nu 0} = 0. \quad (8.46)$$

Die allgemeine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  lautet  $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^2 A_i \mathbf{b}_i e^{q_i t}$ .

Zunächst zu einem Steady state in Fall 1. Weil  $A_i = 0$  für alle instabilen Eigenwerte (z.B.  $i = 1, 2$ ) gelten muss, folgt  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* = \mathbf{b}_0 e^{q_0 t}$ . In  $t = 0$  ergibt sich  $\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^* = \mathbf{b}_0$ . Damit können in (8.46)  $b_{z0}$  und  $b_{\nu 0}$  mit jeweils  $z(0) - z^*$  und  $\nu(0) - \nu^*$  ersetzt werden. Es folgt

$$\left( -\frac{1 - \alpha}{\lambda} z^* - q_0 \right) [z(0) - z^*] - \bar{\sigma}(1 - \alpha) \ln \lambda z^* [\nu(0) - \nu^*] = 0.$$

Diese Gleichung und Gleichung (8.45) legen die Startwerte von  $z(0)$  und  $\nu(0)$  fest. Damit kann mit  $b_{z0} = z(0) - z^*$  und  $b_{\nu 0} = \nu(0) - \nu^*$  und der ersten Zeile in  $(\mathbf{J} - q_i \mathbf{I})\mathbf{b}_i = 0$  dann  $\chi(0) - \chi^* = b_{\chi i}$  bestimmt werden. Wie am Ende von Abschnitt 8.2.2 erklärt wurde, bestimmen nun die Startwerte der drei Variablen,  $\chi(0)$ ,  $z(0)$  und  $\nu(0)$ , die Entwicklung aller Mengen und Preise in der Zeit.

Als nächstes zu Fall 2. Instabilität bedeutet, dass  $A_i = 0$  für  $i = 0, 1, 2$ . Es gibt also keine Möglichkeit, in den Steady state zu gelangen, wenn die Ökonomie nicht exakt im Steady state startet, d.h. wenn die Startwerte nicht genau

$$\frac{\Delta(0)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{K(0)} = \left( \frac{\Delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{K} \right)^*$$

betragen. Im anderen Fall mit zwei stabilen Eigenwerten muss  $A_i = 0$  nur für einen Eigenwert gelten,  $i = 2$ . Es folgt  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* = \sum_{i=0}^1 A_i \mathbf{b}_i e^{q_i t}$  und  $\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^* = \sum_{i=0}^1 A_i \mathbf{b}_i$ . Mit den Eigenvektoren  $\mathbf{b}_0$  und  $\mathbf{b}_1$  ergibt dies drei Gleichungen mit fünf Unbekannten  $\chi(0)$ ,  $z(0)$ ,  $\nu(0)$ ,  $A_0$  und  $A_1$ . Gleichung (8.45) ist eine weitere Gleichung in diesen Unbekannten. Das System ist damit unterbestimmt und es gibt unendlich viele Lösungen. Der gleichgewichtige Wachstumspfad ist indeterminiert.

### 8.2.7 Offene Volkswirtschaft mit $M$ Ländern

In Arnold (2007) wird eine Klasse von Wachstumsmodellen analysiert, bei denen eine „ $M$ -Länder-Ökonomie“, die identische Präferenzen und Technologien haben und wo es freien Handel und Kapitalverkehr und internationale Wissens-Spillover gibt, unter bestimmten Voraussetzungen ein Gleichgewicht einer hypothetischen, integrierten „Weltökonomie“ repliziert, wenn es keine Beschränkung der Faktormobilität gibt. Das analysierte Modell hier gehört zu dieser Klasse. Deshalb kann Theorem 1 aus (Arnold 2007) angewendet werden. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Replikation lauten:

**Theorem 3:** *Angenommen, es gebe eine Anzahl  $M (\geq 2)$  an Ländern, die identische Präferenzen und Technologien haben. Außerdem gebe es freien Handel im Endprodukt und den Zwischenprodukten, Finanzkapital sei uneingeschränkt mobil, und es gebe internationale Wissens-Spillover. Dann repliziert die „ $M$ -Länder-Ökonomie“ das Gleichgewicht einer hypothetischen integrierten „Weltökonomie“ genau dann, wenn physisches Kapital international mobil ist und/oder es multinationale Firmen gibt oder Patente international gelten.*

**Beweis:** Die Intuition des Beweises ist die folgende: Die Replikation des Gleichgewichts der „ $M$ -Länder-Ökonomie“ ist genau dann möglich, wenn die weltweite Produktion so auf die einzelnen Länder aufgeteilt werden kann, dass sie in jedem Land nicht-negativ ist. Es gibt drei Arten von produktiver Aktivität: Endproduktherstellung, Zwischenproduktherstellung und Forschung. Endproduktherstellung und Forschung sind international mobil. Die Herstellung der Zwischenprodukte geschieht genau dann in dem Land, in dem sie erfunden wurden, wenn es weder multinationalen Firmen noch internationale Patente gibt. Von den zwei primären Faktoren Arbeit und physisches Kapital ist Arbeit annahmegemäß immobil. „Altes“ physisches Kapital (wenn es bereits installiert wurde) kann entwe-

der immobil oder mobil sein. Allerdings ist wegen der Annahme freien Handels beim Endprodukt neues physisches Kapital (nicht konsumierter Teil des Endproduktes) natürlich perfekt mobil. Seien anstatt der Großbuchstaben der Variablen nun Kleinbuchstaben die Variablen für einzelne Länder, die durch einen Exponenten  $m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) unterschieden werden. Das physische Kapital, das einem Land  $m$  gehört, sei  $k^m$ . Das physische Kapital, das im Land  $m$  benutzt wird, sei  $k'^m$ . Entsprechend sei  $a^m$  die Anzahl an Zwischengütern, deren höchste Qualität im Land  $m$  erfunden wurde, und  $a'^m$  die Anzahl an Zwischengütern der höchsten Qualität, die im Land  $m$  produziert werden. Weil die Herstellung von Zwischenprodukten die einzige Verwendung von physischem Kapital ist, folgt

$$k'^m = a'^m x, \quad \text{für } m = 1, \dots, M, \quad (8.47)$$

wobei  $x$  die einheitliche, produzierte Menge eines jeden Zwischengutes ist. Wenn physisches Kapital immobil ist (d.h.,  $k'^m = k^m$ ) und Zwischenprodukte dort hergestellt werden müssen, wo sie erfunden wurden ( $a'^m = a^m$ ), dann ist (8.47) im Allgemeinen nicht erfüllt. Mit Mobilität des physischen Kapitals, kann sich  $k'^m$  anpassen, so dass (8.47) erfüllt ist. Mit multinationalen Unternehmen oder internationalen Patenten kann sich  $a'^m$  anpassen, damit (8.47) gilt. In beiden Fällen ist eine Replikation möglich, und die Allokation von Arbeit,  $l^m$ , auf Endprodukt-herstellung oder Forschung ist unbestimmt. Wenn sowohl physisches Kapital als auch die Produktion der Zwischengüter international mobil sind, dann gibt es einen weiteren Freiheitsgrad.

### 8.2.8 Schlussbemerkung

Die Implementierung von Qualitätsverbesserungen à la Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4, 1991b) in das Romer-Model führt zu ungewöhnlichen komparativ-statischen und dynamischen Eigenschaften, welche in keinem der beiden Modelle vorkommen können. Außerdem gelten diese Resultate auch für offene Volkswirtschaften einer „ $M$ -Länder-Ökonomie“ mit internationalen Wissens-Spillovern, wenn Kapital international mobil ist und/oder multinationale Unternehmen existieren oder es internationale Patente gibt. Diese Ergebnisse tragen zu einem besseren Verständnis eines der wichtigsten Modelle der endogenen Wachstumstheorie bei.

### 8.2.9 Appendix: Herleitungen

#### Herleitungen von $\chi^*$ , $z^*$ und $\nu^*$

In einem Steady state gilt  $\dot{\chi}^* = \dot{z}^* = \dot{\nu}^* = 0$ . Damit werden aus (8.22), (8.27) und (8.28) jeweils

$$\chi^* = z^* \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma}\right) + \frac{\rho}{\sigma} \quad (8.48)$$

$$z^* = \frac{\lambda}{\alpha} \left[ l \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda - 1 \right) - \nu^* \alpha \bar{\sigma} \ln \lambda \right] \quad (8.49)$$

$$\nu^* = \left[ \chi^* - z^* \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - l \left( \ln \lambda - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \frac{1}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda}. \quad (8.50)$$

Einsetzen von  $\chi^*$  aus Gleichung (8.48) in (8.50) ergibt

$$\nu^* = \frac{z^* \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\right) + \frac{\rho}{\sigma} - l \left( \ln \lambda - \frac{1}{\alpha} \right)}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda}.$$

Nach Eliminieren von  $z^*$  mit (8.29) und (8.49) folgt

$$\begin{aligned} \nu^* &= \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ l \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda - 1 \right) - \nu^* \alpha \bar{\sigma} \ln \lambda \right] \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{\sigma} - l \left( \ln \lambda - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \frac{1}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda} \\ \nu^* + \nu^* \bar{\sigma} \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\right) \ln \lambda \frac{1}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda} &= \left[ \frac{1}{\alpha} l \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda - 1 \right) \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\right) + \frac{\rho}{\sigma} \right. \\ &\quad \left. - l \left( \ln \lambda - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \frac{1}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda} \\ \nu^* \alpha \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right) \frac{\ln \lambda}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda} &= \left\{ l \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \ln \lambda + \frac{1}{\sigma} \right] + \frac{\rho}{\sigma} \right\} \frac{1}{(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda} \\ \nu^* &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{1}{\alpha \ln \lambda} \left[ 1 + \phi - (1 - \sigma) \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \right] \quad (8.51) \\ &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{1}{\alpha \ln \lambda} \left[ 1 + \phi - (1 - \sigma) \frac{1 + \bar{\phi}}{1 - \bar{\sigma}} \right] \\ &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{1}{\alpha \ln \lambda} \frac{(1 + \phi)(1 - \bar{\sigma}) - (1 + \bar{\phi})(1 - \sigma)}{1 - \bar{\sigma}} \\ &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{1}{\alpha \ln \lambda} \left( 1 + \phi - \frac{1 - \sigma}{1 - \bar{\sigma}} - \frac{1 - \sigma}{1 - \bar{\sigma}} \bar{\phi} \right) \\ &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{1}{\alpha \ln \lambda} \left[ 1 + \phi - \frac{1 - \sigma}{1 - \bar{\sigma}} - \phi(\sigma) \right] \\ &= \frac{l}{\alpha \ln \lambda} \left[ \frac{\phi - \phi(\sigma)}{\sigma - \bar{\sigma}} + \frac{1}{1 - \bar{\sigma}} \right]. \end{aligned}$$



Mit (8.29), (8.32) und (8.49) ergibt sich  $z^*$ :

$$\begin{aligned}
 z^* &= \frac{\lambda}{\alpha} \left( \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda - 1 \right) l - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma - \bar{\sigma}} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} (\sigma - 1) \ln \lambda + 1 \right] l + \rho \right\} \right) \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha} \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\alpha(1 - \bar{\sigma}) \ln \lambda}{1 - \alpha} \sigma l - \sigma l - \bar{\sigma} \rho \right] \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha} \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} (\bar{\phi} \sigma - \phi \bar{\sigma}).
 \end{aligned}$$

Die Gleichung für  $\chi^*$  ergibt sich schließlich, wenn (8.31) in (8.48) eingesetzt und umgeformt wird:

$$\begin{aligned}
 \chi^* &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi} \sigma - \phi \bar{\sigma}) \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma} \right) + \frac{\rho}{\sigma} \\
 &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi} \sigma - \phi \bar{\sigma}) \frac{\lambda \sigma - \alpha}{\lambda \sigma} + \frac{\phi (\sigma - \bar{\sigma})}{\sigma} \right] \\
 &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ \frac{\lambda}{\alpha} (\bar{\phi} \sigma - \phi \bar{\sigma}) + \phi - \bar{\phi} \right].
 \end{aligned}$$

### Herleitung von $I^*$

Mit (8.51) kann  $I^*$  folgendermaßen hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 I^* &= l - (1 - \alpha) \nu^* \\
 &= l - (1 - \alpha) \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \frac{1}{\alpha \ln \lambda} \left[ 1 + \phi - (1 - \sigma) \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} \right] \\
 &= l \frac{\left( \frac{1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1 \right) \alpha \ln \lambda - 1 + \alpha - \phi(1 - \alpha) + \alpha \ln \lambda}{(\sigma - \bar{\sigma}) \alpha \ln \lambda} \\
 &= l \frac{\alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) - (1 - \alpha) \phi}{(\sigma - \bar{\sigma}) \alpha \ln \lambda}.
 \end{aligned}$$

Die Terme im Zähler mit  $l$  multipliziert ergibt den mittleren Teil in (8.33). Für die rechte Gleichung in (8.33) wird der letzte Ausdruck umgeformt:

$$\begin{aligned}
 I^* &= l \frac{\frac{\alpha(\lambda-1)}{\lambda(1-\alpha)}(1-\alpha) - (1-\alpha)\phi}{(\sigma - \bar{\sigma}) \alpha \ln \lambda} \\
 &= l \frac{(1-\alpha)(\bar{\phi} - \phi)}{\alpha(\ln \lambda)(\sigma - \bar{\sigma})}.
 \end{aligned}$$

**Transversalitätsbedingung**

Die Transversalitätsbedingung des Nutzenmaximierungsproblems der Haushalte lautet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t)B(t).$$

Sie ist in einem Steady state genau dann erfüllt, wenn  $\dot{\xi}/\xi + \dot{B}/B < 0$  gilt. Mit  $\dot{\xi}/\xi = -\rho - \sigma\dot{c}/c$  (aus (2.9)) und  $\dot{c}/c = \dot{B}/B = \dot{Y}/Y$  (siehe (7.23)) folgt:

$$\begin{aligned} \rho &> -\sigma \left( \frac{\dot{c}}{c} \right)^* + \left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)^* \\ &= -\sigma \left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)^* + \left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)^* \\ &= (1 - \sigma) \left( \frac{\dot{Y}}{Y} \right)^* \\ &= (1 - \sigma) \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\ln \lambda) I^* \\ &= (1 - \sigma) \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\ln \lambda) \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) l - (1 - \alpha)\rho}{(\sigma - \bar{\sigma})\alpha \ln \lambda} \\ &= (1 - \sigma) \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) l - (1 - \alpha)\rho}{(1 - \alpha)(\sigma - \bar{\sigma})} \\ \phi &> (1 - \sigma) \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - (1 - \alpha)\phi}{(1 - \alpha)(\sigma - \bar{\sigma})}. \end{aligned}$$

Für  $\sigma > \bar{\sigma}$ , folgt weiter

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha)(\sigma - \bar{\sigma})\phi &> (1 - \sigma)\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - (1 - \alpha)(1 - \sigma)\phi \\
(1 - \alpha)(\sigma - \bar{\sigma} + 1 - \sigma)\phi &> (1 - \sigma)\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \\
\phi &> \frac{(1 - \sigma)\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1 - \bar{\sigma})(1 - \alpha)} \\
&= \frac{(1 - \sigma)\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda}(1 - \alpha)} \\
&= (1 - \sigma) \frac{\alpha^2(\lambda - 1) \ln \lambda}{(1 - \alpha)(\lambda - \alpha)} \\
&= (1 - \sigma) \frac{\alpha(\lambda - 1)}{\lambda(1 - \alpha)} \frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} \\
&= \frac{1 - \sigma}{1 - \bar{\sigma}} \bar{\phi} \\
&= \phi(\sigma).
\end{aligned}$$

Falls  $\sigma < \bar{\sigma}$ , dann drehen sich die Ungleichheitszeichen um.

### Beweis von (8.35)

Einsetzen der Definition von  $\bar{\sigma}$  und der Funktion  $\phi(\sigma)$  aus (8.29):

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma} + \phi - \bar{\phi} &= \phi(1 - \bar{\sigma}) - \bar{\phi}(1 - \sigma) \\
&= \phi \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} - \frac{\alpha(\lambda - 1)}{\lambda(1 - \alpha)} \frac{(1 - \alpha)(\lambda - \alpha)}{\alpha^2(\lambda - 1) \ln \lambda} \phi(\sigma) \\
&= \phi \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} - \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} \phi(\sigma) \\
&= \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} [\phi - \phi(\sigma)] \\
\phi\bar{\sigma} - \bar{\phi}\sigma &= \phi - \bar{\phi} - \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} [\phi - \phi(\sigma)].
\end{aligned}$$

**Herleitung von (8.39)**

Mit der Gewinnleichung,  $\pi = \alpha(1 - 1/\lambda)Y$ , folgt für den Patentwert

$$\begin{aligned}
 P_A(t) &= \int_t^\infty \exp \left\{ - \int_t^\tau [r(s) + I(s)] ds \right\} \pi(\tau) d\tau \\
 &= \int_t^\infty \exp \left\{ - \int_t^\tau [r(s) + I(s)] ds \right\} \alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) Y(\tau) d\tau \\
 &= \int_t^\infty \exp \left\{ - \int_t^\tau \left[ r(s) + I(s) - \frac{\dot{Y}(s)}{Y(s)} \right] ds \right\} \alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) Y(t) d\tau \\
 \frac{P_A(t)}{Y(t)} &= \alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \int_t^\infty \exp \left\{ - \int_t^\tau \left[ r(s) + I(s) - \frac{\dot{Y}(s)}{Y(s)} \right] ds \right\} d\tau.
 \end{aligned}$$

In einem Steady state mit  $I = I^*$ ,  $r = r^*$  und  $\dot{Y}/Y = (\dot{Y}/Y)^* = \alpha I^*(\ln \lambda)/(1 - \alpha)$  jeweils konstant wird dies zu

$$\left( \frac{P_A}{Y} \right)^* = \frac{\alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right)}{r^* + I^* - \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\ln \lambda) I^*}.$$

**Beweis von (8.40)**

Die Bedingung für ein Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt, die Forschungstechnologie, die Nachfrage nach Arbeit aus dem Endproduktsektor, freier Marktzutritt in F&E und (8.39) ergeben in einem Steady state

$$\begin{aligned}
 L &= L_A + L_Y \\
 \frac{L}{a} &= \frac{L_A}{a} + \frac{L_Y}{a} \\
 &= I + (1 - \alpha) \frac{Y}{wa} \\
 &= I + (1 - \alpha) \frac{Y}{P_A} \\
 &= I^* + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left[ r^* + \left( 1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \lambda \right) I^* \right].
 \end{aligned}$$

Entscheidend ist hier, dass bei einem gegebenen Zinssatz ein Anstieg in der Innovationsrate einen Rückgang der aggregierten Nachfrage nach Arbeit auslöst, wenn

der „market-size“-Effekt hinreichend stark ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda \right) &< 0 \\
\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\lambda-1}{\lambda} + 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda &< 0 \\
\alpha \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) + 1 - \alpha - \alpha \ln \lambda &< 0 \\
1 - \frac{\alpha}{\lambda} &< \alpha \ln \lambda \\
\frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} &< 1 \\
0 &< 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \\
0 &< \bar{\sigma}.
\end{aligned}$$

Für einen Anstieg von  $I^*$  muss die Beschäftigung in F&E steigen. Wenn aber  $\bar{\sigma} > 0$  ist, dann steigt durch den „market-size“-Effekt der Wert einer Innovation und damit – über die “free-entry“-Bedingung – der Lohnsatz hinreichend stark, so dass die Beschäftigung in der Endproduktherstellung überproportional fällt und die aggregierte Arbeitsnachfrage sinkt.

Nun kann das Verhältnis zwischen  $r^*$  und  $I^*$  beschrieben werden. Ein Anstieg von  $r^*$  erhöht eindeutig die Nachfrage nach Arbeit im Endproduktsektor, weil der Patentwert und damit der Lohnsatz fällt. Damit folgt für ein gegebenes  $I^*$  eine Übernachfrage nach Arbeit. Die Frage ist nun, wie  $I^*$  sich anpassen muss, um ein Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt wieder herzustellen.

Zunächst zu Fall 1.1 ( $\bar{\sigma} < 0$ ). Hier muss  $I^*$  fallen. Zum einen fällt dadurch die Arbeitsnachfrage in F&E. Zum Anderen steigt der Patentwert wegen der geringeren Diskontierung, weshalb der Lohnsatz mit ansteigt und die Arbeitsnachfrage aus dem Endproduktsektor fällt. Wenn aber  $\bar{\sigma} > 0$  gilt (in den Fällen 1.2 und 2), dann verringert ein Anstieg von  $I^*$  die Nachfrage nach Arbeit, weil der „market-size“-Effekt so ausgeprägt ist, dass ein Anstieg im Patentwert und damit im Lohnsatz einen Rückgang der Arbeitsnachfrage im Endproduktsektor bewirkt, der stärker ist als der Anstieg der F&E-Beschäftigung.

### Relative Steigungen der CG- und PG-Linien

Wegen (8.38) und (8.40) gilt, dass die PG-Linie genau dann ansteigend verläuft und steiler ist als die CG-Linie, wenn

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\lambda-1}{\lambda} - 1} &> \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda} \frac{1}{\sigma} \\
 \sigma &> \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \lambda - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\lambda-1}{\lambda} - 1 \right) \\
 &= 1 - \frac{1 - \frac{1}{\lambda}}{\ln \lambda} - \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda} \\
 &= 1 - \frac{\alpha - \frac{\alpha}{\lambda} + 1 - \alpha}{\alpha \ln \lambda} \\
 &= 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \\
 &\equiv \bar{\sigma}.
 \end{aligned}$$

#### Fall 1.1

Die linke Grafik in Abbildung 8.4 zeigt den Fall 1.1 ( $\bar{\sigma} < 0$ ): die PG-Linie fällt. Zunächst zur durchgezogenen CG-Linie. Am Schnittpunkt der CG-Linie mit der PG-Linie ist ein Steady state mit positiven Werten von  $r^*$  und  $I^*$ . Für Zinssätze oberhalb des Steady-state-Wertes liegt die CG-Linie oberhalb von der PG-Linie. Das bedeutet, dass die von den Haushalten verlangte Wachstumsrate größer ist als die durch Innovation hervorgebrachte. Um in ein Gleichgewicht zu kommen, muss deshalb der Zinssatz fallen. Dadurch fällt die Wachstumsrate des Konsums, und Innovationen werden gefördert.

Damit zur komparativen Statik. Angenommen, die Diskontrate,  $\rho$ , fällt. Aus (8.38) wird klar, dass sich die CG-Linie nach oben verschiebt (die gestrichelte Linie in der linken Grafik aus Abbildung 8.4). Beim ursprünglichen Zinssatz liegt die CG-Linie über der PG-Linie. Um ein Gleichgewicht zu erreichen, muss der Zins,  $r^*$ , fallen und die Innovationsrate,  $I^*$ , steigen. Die komparativ-statischen Eigenschaften sind so, wie man es erwarten würde. Ähnlich wirkt ein Anstieg von  $L/a$ . Die PG-Linie verschiebt sich nach rechts, wodurch sich der Zinssatz und die Innovationsrate erhöhen.

#### Fall 1.2

Die mittlere Grafik in Abbildung 8.4 zeigt den Fall 1.2 ( $0 < \bar{\sigma} < \sigma$ ): die PG-Linie steigt und ist steiler als die CG-Linie. Der Schnittpunkt der beiden durchgezo-

genen Linien zeigt einen Steady state mit positivem Zins und positiver Innovationsrate. Anders als in Fall 1.1 übersteigt die CG-Linie jetzt die PG-Linie bei Zinssätzen unterhalb des Steady-state-Wertes. Der Zins muss steigen, damit ein Gleichgewicht erreicht werden kann. Durch den Zinsanstieg wird die Innovationsrate erhöht, weil eine höhere Innovationsrate nötig ist, um die Übernachfrage nach Arbeit auszugleichen, wenn der „market-size“-Effekt den „creative-destruction“-Effekt übersteigt. Weil die PG-Linie stärker auf Änderungen im Zinssatz reagiert, nimmt der Abstand zwischen der CG-Linie und der PG-Linie ab.

Angenommen, die CG-Linie verschiebt sich nach oben wegen eines Rückgangs der Diskontrate,  $\rho$ , (die gestrichelte Linie in der mittleren Grafik in Abbildung 8.4). Die CG-Linie liegt oberhalb der PG-Linie beim ursprünglichen Zins. Wie oben erklärt ist hier ein Anstieg des Zinssatzes nötig, um den Abstand zwischen der CG-Linie und der PG-Linie zu beseitigen. Wegen des positiven Zusammenhangs zwischen Innovationsrate und Zins folgt dadurch ein Anstieg der Innovationsrate. Wie in Fall 1.1 bewirkt ein Anstieg von  $L/a$  einen Anstieg des Zinssatzes und der Innovationsrate.

## Fall 2

In der rechten Grafik aus Abbildung 8.4 wird Fall 2 illustriert ( $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ ): die PG-Linie steigt an, ist aber flacher als die CG-Linie. Im Schnittpunkt der durchgezogenen Linien existiert wieder ein Steady state mit positiven Werten von  $r^*$  und  $I^*$ . Wie in Fall 1.1 übersteigt die CG-Linie die PG-Linie bei Zinssätzen über dem Steady-state-Wert, und der Zinssatz muss fallen, um ins Gleichgewicht zu gelangen. Wie in Fall 1.2 bremst der Zinsrückgang die Innovationsrate. Durch den Zinsrückgang steigt der Wert eines Patents. Wegen freien Marktzutritts in F&E steigt auch der Lohnsatz, wodurch es zu einem Überangebot an Arbeit kommt. Weil im Fall 2 der „market-size“-Effekt den „creative-destruction“-Effekt dominiert, ist ein Rückgang der Innovationsrate nötig, damit die aggregierte Nachfrage nach Arbeit wieder ansteigt. Grund ist, dass der Rückgang der Innovationsrate den Wert eines Patents und damit den Lohnsatz so stark mindert, dass der Anstieg der Arbeitsnachfrage im Endproduktsektor stärker ist als der Rückgang der Arbeitsnachfrage in F&E. Weil aber die PG-Linie stärker auf Zinsänderungen reagiert als die CG-Linie, wird ein Gleichgewicht erreicht, wenn die Zinsen fallen.

Angenommen  $\rho$  fällt. Die CG-Linie verschiebt sich nach oben (die gestrichelte Linie in der rechten Grafik in Abbildung 8.4). Wie in Fall 1.1 übersteigt die CG-

Linie die PG-Linie beim ursprünglichen, Zins und der Zins muss fallen. Aber im Gegensatz zu Fall 1.1 löst der Zinsrückgang einen Rückgang der Innovationsrate aus. Ein Anstieg von  $L/a$  verschiebt die PG-Linie nach rechts und mindert den Zinssatz und die Innovationsrate.

### Herleitung des linearisierten dynamischen Systems

Die Dynamik des Systems aus (8.22), (8.27) und (8.28) um den Steady state kann mit Hilfe des linearisierten Systems analysiert werden. Für  $\dot{\chi}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &\approx \underbrace{\dot{\chi}(\chi^*, z^*, \nu^*)}_{=0} + \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \chi} \Big|_{\chi^*, z^*, \nu^*} (\chi - \chi^*) + \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial z} \Big|_{\chi^*, z^*, \nu^*} (z - z^*) + \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial \nu} \Big|_{\chi^*, z^*, \nu^*} (\nu - \nu^*) \\ &\approx \left[ \chi^* + \underbrace{\chi^* - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma}\right) z^* - \frac{\rho}{\sigma}}_{=0} \right] (\chi - \chi^*) - \chi^* \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma}\right) (z - z^*) \\ &= \chi^* (\chi - \chi^*) - \chi^* \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma}\right) (z - z^*).\end{aligned}$$

Analog folgt für  $\dot{z}$  und  $\dot{\nu}$

$$\begin{aligned}\dot{z} &\approx -\frac{1-\alpha}{\lambda} z^* (z - z^*) + \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \frac{1-\alpha}{\alpha} z^* \right] (\nu - \nu^*) \\ \dot{\nu} &\approx \nu^* \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\lambda} - (1-\alpha) \ln \lambda \right] (\nu - \nu^*) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \nu^* (z - z^*) - \nu^* (\chi - \chi^*).\end{aligned}$$

Durch Ersetzen der Ausdrücke  $1 - \alpha/\lambda - \alpha \ln \lambda$  und  $1/\alpha - 1/\lambda - (1-\alpha) \ln \lambda$  mit  $-\bar{\sigma} \alpha \ln \lambda$  bzw.  $(\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda$  erhält man das System in (8.41). Das linearisierte System kann in Kurzform auch als  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  ausgedrückt werden, wobei  $\mathbf{x} \equiv (\chi, z, \nu)'$  und  $\mathbf{J}$  die Jacobi-Matrix in (8.41) ist.

### Herleitung von Det(J)

Die Determinante von  $\mathbf{J}$  lautet:

$$\begin{aligned}\text{Det}(\mathbf{J}) &\equiv -\chi^* \left( \frac{1-\alpha}{\lambda} \right) z^* \nu^* (\alpha - \bar{\sigma}) \ln \lambda - \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma} \right) \chi^* z^* \alpha \bar{\sigma} \frac{1-\alpha}{\alpha} \nu^* \ln \lambda \\ &\quad + \chi^* z^* \alpha \bar{\sigma} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \nu^* \ln \lambda \\ &= \chi^* z^* \nu^* (1-\alpha) \ln \lambda \left[ -\frac{\alpha - \bar{\sigma}}{\lambda} - \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda \sigma} \right) \bar{\sigma} + \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \bar{\sigma} \right] \\ &= -\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sigma} (\ln \lambda) \chi^* z^* \nu^*.\end{aligned}$$



**Herleitung von  $\text{Tr}(\mathbf{J})$** 

Die Spur von  $\mathbf{J}$  lautet

$$\text{Tr}(\mathbf{J}) = \chi^* - \frac{1-\alpha}{\lambda} z^* + \nu^* \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\alpha}\right) \alpha \ln \lambda.$$

Einsetzen der Ausdrücke für  $\chi^*$ ,  $z^*$  und  $\nu^*$ , ergibt

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{J}) &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[ (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) \frac{\lambda - 1 + \alpha}{\alpha} + \phi - \bar{\phi} + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \alpha} (\sigma - 1) \ln \lambda + (1 + \phi) \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{\alpha} \right] \\ &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \left\{ (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) \frac{\lambda - 1 + \alpha}{\alpha} + \phi - \bar{\phi} + \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\alpha}\right) \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\sigma - 1) \ln \lambda + (1 + \phi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen aus (8.29) folgt,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{J}) &= \frac{l}{\sigma - \bar{\sigma}} \left\{ (\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) \frac{\lambda - 1 + \alpha}{\alpha} + \phi - \bar{\phi} + \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\alpha}\right) \left[ 1 + \phi - \frac{1 - \sigma}{1 - \bar{\sigma}} (1 + \bar{\phi}) \right] \right\} \\ &= \frac{l}{\alpha(\sigma - \bar{\sigma})} \left\{ \alpha(\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma} + \phi - \bar{\phi}) + (\lambda - 1)(\bar{\phi}\sigma - \phi\bar{\sigma}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} [(1 - \bar{\sigma})(1 + \phi) - (1 - \sigma)(1 + \bar{\phi})] \right\} \\ &= \frac{l}{\alpha(\sigma - \bar{\sigma})} \left\{ \alpha [(1 - \bar{\sigma})\phi - (1 - \sigma)\bar{\phi}] + (\lambda - 1) [(1 - \bar{\sigma})\phi - (1 - \sigma)\bar{\phi} + \bar{\phi} - \phi] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} [(1 - \bar{\sigma})\phi - (1 - \sigma)\bar{\phi} + \sigma - \bar{\sigma}] \right\} \\ &= \frac{l}{\alpha(\sigma - \bar{\sigma})} \left\{ \left( \alpha + \lambda - 1 + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \right) [(1 - \bar{\sigma})\phi - (1 - \sigma)\bar{\phi}] + (\lambda - 1) (\bar{\phi} - \phi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} (\sigma - \bar{\sigma}) \right\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist die Funktion  $f$ , die in (8.44) definiert wurde. Damit folgt Gleichung (8.43).

**Die Funktion  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)$** 

Die partielle Ableitung von  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)$  nach  $\sigma$ ,  $\partial f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)/\partial \sigma \equiv f_\sigma(\alpha, \lambda)$ , lautet

$$\begin{aligned}
 f_\sigma(\alpha, \lambda) &= \left( \alpha + \lambda - 1 + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \right) \bar{\phi} + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \\
 &= (\alpha + \lambda) \bar{\phi} + (1 + \bar{\phi}) \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} - \bar{\phi} \\
 &= \frac{(\alpha + \lambda)\alpha(\lambda - 1)}{\lambda(1 - \alpha)} + 1 - \alpha \ln \lambda \\
 &= \frac{\alpha^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda \right) + \alpha \left( \lambda - 1 - \ln \lambda + \frac{1}{\alpha} - 1 \right)}{1 - \alpha}.
 \end{aligned}$$

Ableiten der Funktion  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)$  nach  $\phi$  und Vereinfachen ergibt:

$$\begin{aligned}
 f_\phi(\alpha, \lambda) \equiv \frac{\partial f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)}{\partial \phi} &= \left( \alpha + \lambda - 1 + \frac{\alpha - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \right) (1 - \bar{\sigma}) - (\lambda - 1) \\
 &= \alpha(1 - \bar{\sigma}) + (\lambda - 1)(1 - \bar{\sigma}) + \alpha - \bar{\sigma} - (\lambda - 1) \\
 &= \alpha(1 - \bar{\sigma}) - \lambda \bar{\sigma} + \alpha \\
 &= \alpha(1 - \bar{\sigma}) + \lambda(1 - \bar{\sigma}) - (\lambda - \alpha) \\
 &= (\alpha + \lambda) \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} - (\lambda - \alpha) \\
 &= \frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} (\alpha + \lambda - \alpha \lambda \ln \lambda).
 \end{aligned}$$

Weil weder  $f_\sigma(\alpha, \lambda)$  noch  $f_\phi(\alpha, \lambda)$  von  $\sigma$  oder  $\phi$  abhängen, ist die Gleichung  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) = 0$  eine Gerade mit Steigung  $d\phi/d\sigma|_{f(\sigma, \phi)=0} = -f_\sigma(\alpha, \lambda)/f_\phi(\alpha, \lambda)$  im  $(\sigma, \phi)$ -Raum. Weil  $\lambda - 1 > \ln \lambda$  ist, folgt  $f_\sigma(\alpha, \lambda) > 0$ . Deshalb gilt links von der Geraden  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) < 0$  und rechts davon  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) > 0$ . Für  $f_\phi(\alpha, \lambda) < 0$  ist  $d\phi/d\sigma|_{f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda)=0} > 0$ . Umgekehrt folgt für  $f_\phi(\alpha, \lambda) > 0$ , dass die  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) = 0$ -Gerade fallend verläuft. In diesem Fall ist diese Gerade genau dann steiler als die  $\phi(\sigma)$ -Gerade, die in (8.29) definiert wurde, wenn

$$\frac{\frac{\alpha^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda \right) + \alpha \left( \lambda - 1 - \ln \lambda + \frac{1}{\alpha} - 1 \right)}{1 - \alpha}}{\frac{\lambda - \alpha}{\alpha \lambda \ln \lambda} (\alpha + \lambda - \alpha \lambda \ln \lambda)} > \frac{\alpha^2 (\lambda - 1) \ln \lambda}{(\lambda - \alpha)(1 - \alpha)}.$$

Durch Vereinfachungen erhält man die äquivalente Bedingung (siehe unten)

$$1 - \alpha > \alpha \ln \lambda (1 - \alpha \lambda). \quad (8.52)$$

Für  $\alpha \lambda \geq 1$  ist die Richtigkeit von (8.52) offensichtlich. Bei  $\alpha \lambda < 1$  ist der Ausdruck in Klammern positiv. Weil  $\ln \lambda < \lambda - 1$  gilt, wird (8.52) von  $1 - \alpha >$

$\alpha(\lambda-1)(1-\alpha\lambda)$  impliziert. Diese Bedingung ist äquivalent zu  $1 > \alpha\lambda(1+\alpha-\alpha\lambda)$ .

Dass diese Ungleichung erfüllt ist, folgt aus folgendem Zusammenhang:

$$\alpha\lambda(1+\alpha-\alpha\lambda) = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \left(\alpha\lambda - \frac{1+\alpha}{2}\right)^2 < \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 < 1.$$

Damit ist bewiesen, dass die  $f(\sigma, \phi, \alpha, \lambda) = 0$ -Gerade, wenn sie fällt, steiler ist als die  $\phi(\sigma)$ -Gerade.

### Herleitung von (8.52)

Ausgehend von

$$\frac{\frac{\alpha^2(1-\frac{1}{\lambda}+\ln \lambda)+\alpha(\lambda-1-\ln \lambda+\frac{1}{\alpha}-1)}{1-\alpha}}{\frac{\lambda-\alpha}{\alpha\lambda \ln \lambda}(\alpha+\lambda-\alpha\lambda \ln \lambda)} > \frac{\alpha^2(\lambda-1) \ln \lambda}{(\lambda-\alpha)(1-\alpha)},$$

werden die Terme  $1-\alpha$ ,  $\lambda-\alpha$  und  $\alpha \ln \lambda$  gekürzt. Durch Umstellen folgt

$$\alpha^2(\lambda-1+\lambda \ln \lambda) + \alpha \left( \lambda^2 - \lambda - \lambda \ln \lambda + \frac{\lambda}{\alpha} - \lambda \right) > \alpha(\lambda-1)(\alpha+\lambda-\alpha\lambda \ln \lambda).$$

Nach Vereinfachen erhält man (8.52).

### Herleitung der Beziehung zwischen $z$ and $\nu$

$$z = \frac{Y}{K} = \frac{\Delta^\alpha}{\eta^\alpha} \frac{L_Y^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}} = \frac{\Delta^\alpha}{\eta^\alpha} \frac{[a(1-\alpha)\nu]^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}} = \frac{[a(1-\alpha)]^{1-\alpha}}{\eta^\alpha} \left( \frac{\Delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{K} \nu \right)^{1-\alpha}.$$



# Kapitel 9

## Horizontale und vertikale Innovationen

### 9.1 Einleitung

Bisher wurden Wachstumsmodelle vorgestellt, in denen Fortschritt entweder über bessere Qualitäten oder über eine zunehmende Produktvielfalt stattfindet. In diesem Abschnitt wird ein Modell entwickelt, in dem beide Arten von Innovation die Produktivität erhöhen. Es gibt zum einen kontinuierlich komplett neue Produkte (oder Produktionsprozesse). Zum anderen werden vorhandene Güter immer weiter in ihrer Qualität verbessert. Schlechte Qualitäten werden dabei wieder vom Markt verdrängt, es kommt zu „kreativer Zerstörung“.

Die Grundstruktur des Modells wurde von Li (2000) entwickelt. Darin werden die beiden Grundmodelle von Grossman & Helpman (1991a), das Varietätenmodell aus Kapitel 3 und das Qualitätenmodell aus Kapitel 4, verknüpft. Es gibt zwei Forschungssektoren. In einem Sektor erfinden Firmen komplett neue Produkte, im anderen werden bestehende Produkte verbessert. Allerdings gibt es in diesem neuen Modell auch wieder kein physisches Kapital. Das vorliegende Modell erweitert das ursprüngliche Modell von Li (2000) und integriert Kapitalakkumulation.

Anders betrachtet erweitert das hier entwickelte Modell das Romer-Qualitäten-Modell aus Kapitel 7 um einen zusätzlichen Forschungssektor und lässt andere Forschungs-Spillover zu, wenngleich es eine leicht modifizierte Produktionsfunktion in der Endproduktherstellung unterstellen muss.

Außerdem wird im Vergleich zum Modell von Li (2000) der Prozess der Qualitätsverbesserung geändert. Bei Li (2000) muss der Qualitätsführer in einem Sektor eine Lizenzgebühr an den ursprünglichen Erfinder der Varietät abführen. Eine

neue Varietät wird damit niemals wertlos, egal wie viele Qualitätsverbesserungen seit der Produkteinführung bereits stattgefunden haben. Das würde beispielsweise bedeuten, dass die PC-Hersteller Dell oder Hewlett Packard eine Gebühr an den Erfinder des Computers, das Unternehmen Xerox, zahlen müssten. Oder drastischer: Toyota müsste pro verkauften Wagen eine Lizenzgebühr an die Erben von Carl Benz, den Erfinder des Automobils, zahlen. Wenngleich es durchaus vorkommen mag, dass Lizenzierung für ähnliche Produkte möglich ist, scheint es doch eher die Ausnahme als die Regel zu sein. Deshalb wird hier von dieser Annahme abgerückt. Neue Qualitäten dürfen ohne Lizenz des ursprünglichen Erfinders der Varietät vertrieben werden, es findet eine vollständige Gewinnverlagerung zum neuen Qualitätsführer hin statt.

Ein ähnliches Modell – auch ohne physisches Kapital – wurde von Young (1998) entwickelt. Hauptunterschied zu diesem Modell ist die Annahme über die intertemporalen Wissens-Spillover. In den beiden Modellen von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 3 und 4) gibt es starke intertemporale Spillover. Im Qualitätenmodell ist die Wahrscheinlichkeit für einen Forschungserfolg unabhängig von der bereits erreichten Qualitätsstufe (siehe Gleichung (5.2)). Das bedeutet, dass Erfinder für höhere Stufen auf das vorhandene technische Wissen der aktuellen Qualität frei zugreifen können. Sie können sich das Wissen der aktuellen Stufe ohne Kosten aneignen. Im Varietäten-Modell gibt es einen ähnlichen Spillover-Effekt. Es werden umso mehr neue blueprints pro Zeiteinheit erfunden, je mehr blueprints vorhanden sind (siehe Gleichung (2.3)). Forschung begünstigt also künftige Forschung in hohem Maße.<sup>1</sup> Im Modell von Young (1998) gibt es diese Spillover-Effekte nur für vertikale Innovationen (Qualitätsverbesserungen). Je höher die aktuelle Qualität eines Produktes ist, desto geringer sind die Fixkosten einer besseren Qualität. Für neue Varietäten (horizontale Innovation) gibt es diese Spillover nicht. Als Resultat entsteht in diesem Modell Wachstum allein durch Qualitätsverbesserungen, es gibt im Steady state eine konstante Anzahl an Varietäten. Niveaugrößen, wie die Bevölkerung, haben einen Einfluss auf die Anzahl der Varietäten, also auf ein Niveau, aber nicht auf die langfristige Wachstumsrate. Es kommt zu semi-endogenem Wachstum.

Allerdings ist die starke Asymmetrie der Spillover-Effekte bei horizontalen und vertikalen Innovationen durchaus kritikwürdig. Im hier entwickelten Modell

---

<sup>1</sup>Bei Li (2000) werden diese Spillover-Effekte verallgemeinert. Darauf wird weiter unten noch detaillierter eingegangen.

kommt es auch zu semi-endogenem Wachstum, ohne dass es so einer starken Annahme bedarf. Damit entwickelt es das Romer-Qualitäten-Modell aus Kapitel 7 weiter und liefert eine alternative Möglichkeit zu der in Abschnitt 7.5, den Skaleneffekt zu beseitigen. Darüber hinaus wird der Innovationsprozess treffender modelliert, indem die beiden Kanäle der innovationsbasierten Wachstumstheorie – Qualitätsverbesserungen und Erfindungen neuer Produkte – zusammengeführt werden. Beide Arten von Innovation sind hier möglich.

Gegenüber dem Modell von Li (2000) ist das Modell hier vorteilhaft, weil Kapital für die Produktion notwendig ist. Mit der Mikrofundierung des Innovationsprozesses und der Vermeidung von Skaleneffekten ergibt sich vielleicht eine neue Möglichkeit, ein theoretisches Wachstumsmodell empirisch zu überprüfen.

Im nächsten Abschnitt wird das Romer-Modell mit horizontalen und vertikalen Innovationen vorgestellt und vom Modell von Li (2000) abgegrenzt. Danach wird in Abschnitt 9.3 das dynamische Gleichgewicht mit der langfristigen Wachstumsrate und der Ressourcenallokation bestimmt. Schließlich werden in Abschnitt 9.4 die Ergebnisse nochmals zusammengefasst und diskutiert.

## 9.2 Beschreibung des Modells

Die Struktur des Modells ist ähnlich zu den bisher vorgestellten Modellen (siehe Abbildung 9.1). Das Endprodukt,  $Y$ , kann entweder konsumiert werden oder als Rohkapital für die Kapitalgüter,  $x(j)$ , verwendet werden. Neu ist, dass es nun zwei Forschungssektoren gibt. In einem wird Qualitätsverbesserung betrieben, im anderen werden neue Varietäten erfunden. Insgesamt gibt es also drei Möglichkeiten, Arbeit einzusetzen. Die Bevölkerung,  $L(t)$ , ist nicht konstant, sondern wächst mit der Rate  $n$ . Es ergibt sich das gleiche Nutzenmaximierungsproblem wie im Jones-Modell aus Kapitel 3 und damit die Ramsey-Regel aus Gleichung (2.12):  $g_c = (r - \rho)/\sigma$ . Das Endprodukt wird wieder mit Arbeit und Kapitalgütern hergestellt:

$$Y = D_Y^\alpha L_Y^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (9.1)$$

Allerdings hat der Kapital-Qualitätsindex,  $D_Y$ , eine andere Form

$$D_Y \equiv \left\{ \int_0^{A(t)} \left[ \sum_{\omega=0}^{\Omega(j)} q_\omega(j) x_\omega(j) \right]^\beta dj \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad 0 < \beta < 1. \quad (9.2)$$

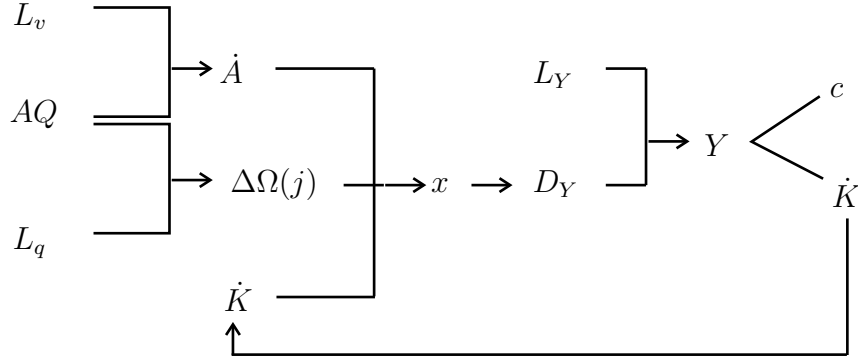


Abbildung 9.1: Die Struktur des Modells

Es gibt eine Masse  $A(t)$  von Varietäten, die durch Forschung ausgeweitet werden kann. Ähnlich wie im Romer-Modell bedeuten zusätzliche Produkte mehr Spezialisierung und eine höhere Produktivität in der Produktion des Endproduktes,  $Y$ . Aus jedem Sektor werden  $x_\omega(j)$  Kapitalgüter der Qualität  $q_\omega$  nachgefragt. Die Qualität ergibt sich aus

$$q_\omega(j) = \lambda^\omega Q(\tau)^{\frac{1-\beta}{\beta}}. \quad (9.3)$$

Der erste Ausdruck,  $\lambda^\omega$ , gibt an, dass die Varietät schon  $\omega$ -mal qualitativ verbessert wurde, wobei  $\lambda$  ( $> 1$ ) wieder die Höhe einer „Qualitätsstufe“ ist. Für neue Varietäten ist die Qualitätsstufe  $\omega = 0$ , sie haben aber eine „Basis-Qualität“  $Q(\tau)$ . Der Zeitpunkt der Erfindung ist  $\tau$ .<sup>2</sup>  $Q(\tau)$  ist ein gewichteter Durchschnitt der bei Erfindung vorhandenen höchsten Qualitäten der anderen Sektoren:

$$Q(\tau) = \frac{1}{A(\tau)} \int_0^{A(\tau)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j) dj. \quad (9.4)$$

Anders betrachtet spiegelt der Ausdruck  $A(t)Q(t) = \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\beta/(1-\beta)}(j) dj$  den Stand des technischen Wissens, ausgedrückt in den erreichten Qualitäten,  $q_{\Omega(j)}(j)$ , und den verfügbaren Varietäten,  $A(t)$ , zu einem Zeitpunkt  $t$  wider.

Der Index  $D_Y$  in (9.2) ist eine Modifikation von  $D_Y$  aus Kapitel 7, Gleichung (7.2).<sup>3</sup> Die Substitutionselastizität zwischen zwei Varietäten beträgt bei  $D_Y$  in

<sup>2</sup>Die einzelnen Varietäten werden zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfunden. Streng genommen müsste der Zeitpunkt der Erfindung,  $\tau$ , also noch mit einem zusätzlichen Index (beispielsweise  $\tau_j$ ) versehen werden. In der folgenden Analyse spielt diese Unterscheidung aber keine Rolle, weshalb auf sie zur besseren Übersichtlichkeit verzichtet wird.

<sup>3</sup>Im Appendix zu diesem Kapitel wird gezeigt, dass für  $A = 1$  Gleichung (7.2) ein Spezialfall von Gleichung (9.2) für  $\beta \rightarrow 0$  ist.



(7.2) exakt eins. Bei der Spezifikation von  $D_Y$  hier ist sie mit  $1/(1 - \beta)$  größer als eins.<sup>4</sup>

Anders als in Li (2000) werden Zwischenprodukte nicht mit Arbeit hergestellt, sondern wieder aus nicht-konsumiertem Output („Rohkapital“). Es wird wieder zur Vereinfachung angenommen, dass aus einer Einheit Rohkapital eine Einheit des Kapitalgutes ohne weitere Faktoren entsteht. Kapitalguthersteller haben zwei Möglichkeiten, Forschung zu betreiben: Entweder sie entwickeln bessere Qualitäten bestehender Produkte. Dann wird, analog zu den Argumenten in Abschnitt 7.3 („Arrow-Effekt“ oder „replacement-effect“), weitere Forschung nur von „Outsidern“ betrieben. Oder sie entwickeln komplett neue Produkte (Varietäten), die dann die Basis-Qualität  $Q(t)$  haben.

Die Forschungstechnologie für Varietäten-F&E ist ähnlich zu der im Jones-Modell (siehe Gleichung (3.1))

$$dA(t) = \frac{L_v(t)}{a_v} A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v-1} dt, \quad \phi_v, \delta_v > 0. \quad (9.5)$$

Wird die Menge  $L_v$  an Arbeit  $dt$  lang eingesetzt, dann entstehen  $dA$  neue Varietäten. Die Produktivität von Forschungsarbeit wird mit  $a_v$  angegeben. Der Ausdruck  $A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v-1}$  fängt zwei externe Effekte auf.  $A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v}$  ist der positive Effekt des Bestandes an technischem Wissen,  $A(t)Q(t)$ , auf Varietäten-Forschung. Aber es gibt auch einen negativen Effekt,  $Q(t)^{-1}$ , der, wie in Abschnitt 7.5, ausdrückt, dass Forschung bei höherer Qualität immer schwieriger wird.

Bezüglich Qualitäten-F&E wird wieder angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, in einem Sektor  $j$  die Qualität zu erhöhen,  $I$ , davon abhängt, wie viel Forschungseinsatz in Form von Arbeit,  $L_q$ , getätigt wird und auf welchem technischen Niveau man sich bereits befindet. Konkret gilt folgende Technologie:

$$I(j, t) = \frac{L_q(j, t)}{a_q} \frac{A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}}{q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j, t)}, \quad \phi_q, \delta_q > 0, \quad (9.6)$$

mit  $a_q$  als Produktivitätsparameter und  $A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}$  als positivem Effekt von bestehendem technischem Wissen auf den Qualitäten-Forschungsprozess. Der Ausdruck  $q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j, t)$  im Nenner bedeutet wieder, dass in einem Sektor  $j$  Qualitätssteigerungen immer schwieriger werden, je höher die aktuelle Qualität ist, die verbessert werden soll.

---

<sup>4</sup>Genau genommen ist die Substitutionselastizität negativ. Hier ist also vom Betrag der Substitutionselastizität die Rede.

Bei Li (2000) ist der Schwerpunkt der Analyse, dass bei den hier gewählten Forschungstechnologien in einem Wachstumsmodell mit zwei Forschungssektoren semi-endogenes Wachstum die Regel und endogenes Wachstum die äußerst unwahrscheinliche Ausnahme ist.<sup>5</sup> Auf diesen Aspekt wird hier nicht weiter eingegangen.

## 9.3 Dynamisches Gleichgewicht

Ähnlich wie im Jones-Modell werden die Wachstumsraten der verfügbaren Varietäten und die der durchschnittlichen Qualität durch exogene Größen, u.a. der Bevölkerungswachstumsrate,  $n$ , festgelegt. Im Folgenden werden (nach der Bestimmung des optimalen Konsumpfades der Haushalte in 9.3.1) zunächst diese Wachstumsraten in Unterabschnitt 9.3.2 berechnet, danach wird in 9.3.3 die Wachstumsrate der Endproduktherstellung,  $g_Y$ , und in 9.3.4 die Aufteilung von Arbeit auf die drei Sektoren bestimmt.

Zuvor wird aber die Bedingung für einen optimalen Konsumpfad der Haushalte hergeleitet.

### 9.3.1 Haushalte

Die Haushalte maximieren die intertemporale Nutzenfunktion

$$\max_{c(t)} U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} L(t) \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt,$$

gegeben die Haushalts-Budgetbeschränkung<sup>6</sup>

$$\dot{B}(t) + c(t)L(t) = r(t)B(t) + w(t)L(t).$$

Für den Parameter  $\sigma$ , der die intertemporale Substitutionselastizität im Konsum bestimmt, und die Diskontrate  $\rho$  werden wieder nur positive Werte zugelassen.

Aus der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H} = e^{-\rho t} L (c^{1-\sigma} - 1)/(1 - \sigma) + \xi [wL + rB - cL]$  ergeben sich die Bedingungen erster Ordnung

---

<sup>5</sup>Li zeigt, dass, nur wenn  $\phi_q = \phi_v$  und  $\delta_q = \delta_v$  gleichzeitig gilt, die Wachstumsrate leicht beeinflusst werden kann, z.B. durch eine Forschungssubvention (endogenes Wachstum).

<sup>6</sup>Wie z.B. bei Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 2) könnte auch mit der Budgetbeschränkung pro Kopf,  $\dot{a} = ar + w - c - an$ , mit  $a$  als Pro-Kopf Bestand an Wertpapieren, optimiert werden. Die Resultate sind identisch.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c^{-\sigma} e^{-\rho t} L - \xi L = 0 \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B} = r\xi = -\dot{\xi}. \quad (9.8)$$

Außerdem muss die Transversalitätsbedingung wieder erfüllt sein:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [B(t)\xi(t)] = 0. \quad (9.9)$$

Aus den Bedingungen (9.7) und (9.8) folgt die gleiche Ramsey-Regel wie im Romer-Modell in Kapitel 2, bei dem die Bevölkerungsgröße konstant ist:<sup>7</sup>

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\sigma}. \quad (9.10)$$

Die Transversalitätsbedingung legt wieder eine Beschränkung auf die möglichen Parameterwerte der Ökonomie. Diese wird weiter unten genauer bestimmt.

### 9.3.2 Technischer Fortschritt

Definitionsgemäß sind in einem Steady-state die Wachstumsraten und die anteilmäßige Aufteilung von Arbeit konstant. Die Veränderung einer Wachstumsrate muss daher gleich null sein. Die eingesetzten Arbeitsmengen in den einzelnen Bereichen müssen mit der gleichen Rate wie die Gesamtmenge an Arbeit wachsen:  $\dot{L}_v/L_v = n$ . Aus Gleichung (9.5) folgt:

$$\frac{d \ln g_A}{dt} = 0 = n + (\phi_v - 1) \frac{\dot{A}}{A} + (\delta_v - 1) \frac{\dot{Q}}{Q}$$

bzw.

$$n = (1 - \phi_v)g_A + (1 - \delta_v)g_Q. \quad (9.11)$$

Im Gleichgewicht muss die Forschungsintensität in allen Sektoren gleich groß sein:<sup>8</sup>

$$I(j, t) = I(t). \quad (9.12)$$

Für die Wachstumsrate der durchschnittlichen Qualität wird im Anhang zu diesem Kapitel gezeigt, dass sie direkt proportional ist zur Forschungsintensität,  $I$ :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) I. \quad (9.13)$$

---

<sup>7</sup>Siehe Kapitel 3 Fußnote 3.

<sup>8</sup>Dies wird weiter unten noch gezeigt.

Bezüglich  $\beta$  wurde angenommen, dass es zwischen null und eins liegt,  $\lambda$  ist strikt größer als eins. Damit ist der Ausdruck in Klammern positiv. Je höher die Forschungsintensität in Qualitäten-F&E,  $I$ , ist, umso schneller wächst die durchschnittliche Qualität der Produkte.

Auflösen von Gleichung (9.6) nach Arbeit ergibt

$$L_q(j, t) = \frac{a_q q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j, t) I(t)}{A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}}.$$

Diese Gleichung gibt die in einem beliebigen Sektor,  $j$ , nachgefragte Menge an Arbeit für Qualitäten-F&E an. Die gesamte Arbeit, die in Qualitätsforschung gesteckt wird, beträgt:  $L_Q(t) \equiv \int_0^{A(t)} L_q(j, t) dj$ . Es folgt

$$L_Q(t) = \frac{a_q I(t) \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j, t) dj}{A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}}.$$

Der Integralausdruck ist gemäß der Definition der durchschnittlichen Qualität aus (9.4) gleich  $A(t)Q(t)$ . Wird außerdem Gleichung (9.13) nach  $I$  aufgelöst und eingesetzt, dann folgt nach wenigen Umformungen eine Gleichung für die Wachstumsrate von  $Q$  in Abhängigkeit vom Stand des technischen Wissens,  $A(t)$  und  $Q(t)$ , und der Gesamtbeschäftigung in Qualitäten-F&E:

$$\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = \frac{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) L_Q(t) A(t)^{\phi_q-1} Q(t)^{\delta_q-1}}{a_q}. \quad (9.14)$$

In einem Steady state muss die Wachstumsrate von  $Q$  und der Arbeitsanteil in Qualitätsforschung,  $L_Q/L$ , wieder konstant sein. Durch logarithmisches Differenzieren der letzten Gleichung erhält man

$$\frac{d \ln g_Q}{dt} = 0 = n + (\phi_q - 1) \frac{\dot{A}}{A} + (\delta_q - 1) \frac{\dot{Q}}{Q}$$

bzw.

$$n = (1 - \phi_q) g_A + (1 - \delta_q) g_Q. \quad (9.15)$$

Ähnlich wie im Jones-Modell werden durch die Annahme nicht-linearer Wissens-Spillover in den Forschungstechnologien die Wachstumsraten von  $A$  und  $Q$ ,  $g_A$  und  $g_Q$ , durch exogene Parameter festgelegt. Die beiden Gleichungen (9.11) und (9.15) bestimmen  $g_A$  und  $g_Q$ :

$$g_A = \frac{\delta_q - \delta_v}{Z} n, \quad (9.16)$$

$$g_Q = \frac{\phi_v - \phi_q}{Z} n, \quad (9.17)$$

wobei  $Z$  folgendermaßen definiert ist:

$$Z \equiv (1 - \phi_q)(1 - \delta_v) - (1 - \phi_v)(1 - \delta_q). \quad (9.18)$$

Damit die Wachstumsrate von  $Q$  positiv ist, muss entweder  $\phi_v > \phi_q$  und  $Z > 0$  sein, oder  $\phi_v < \phi_q$  und  $Z < 0$ . Analog ist  $g_A$  größer null, wenn  $\delta_q > \delta_v$  und  $Z > 0$  oder  $\delta_q < \delta_v$  und  $Z < 0$ . Zusammen ergibt dies folgende Beschränkung auf die zulässigen Werte der Parameter  $\delta_q$ ,  $\delta_v$ ,  $\phi_q$  und  $\phi_v$ : Für

$$\begin{aligned} & \phi_v > \phi_q \quad \text{und} \quad \delta_q > \delta_v \\ \text{oder} & \\ & \phi_v < \phi_q \quad \text{und} \quad \delta_q < \delta_v \end{aligned} \quad (9.19)$$

sind sowohl die Wachstumsrate von  $A$ ,  $g_A$ , als auch die Wachstumsrate von  $Q$ ,  $g_Q$ , positiv. Beides muss in einem langfristigen Gleichgewicht der Fall sein.<sup>9</sup>

Nun sind zwar die Wachstumsraten von  $A$  und  $Q$  bestimmt, es ist aber noch nicht bekannt, wie sich dies auf die Wachstumsraten der Produktion von  $Y$  übersetzt.

### 9.3.3 Wachstumsrate des Outputs

Die Wachstumsrate des Outputs,  $g_Y$ , kann aus der Produktionsfunktion von  $Y$  hergeleitet werden, wenn diese als eine Funktion der Faktoren Arbeit, Kapital und Technologie geschrieben wird:  $Y = F(L_Y, K, A, Q)$ . Dazu sind aber einige Vorarbeiten nötig.

Firmen im Endproduktsektor verhalten sich kompetitiv und maximieren ihre Gewinne, mit dem Endprodukt  $Y$  als Numeraire:

$$\max_{L_Y, x_\omega(j)} \left\{ \int_0^A \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} q_\omega(j) x_\omega(j) \right]^\beta dj \right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} L_Y^{1-\alpha} - w L_Y - \int_0^A \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j) x_\omega(j) dj.$$

Weil Produzenten höherer Qualitäten diejenigen geringerer Qualitäten aus dem Markt preisen, werden nur höchste Qualitäten in der Herstellung von  $Y$  eingesetzt. Es wird unterstellt, dass Qualitätsverbesserungen immer „drastisch“ sind.

---

<sup>9</sup>Nicht zwingend erforderlich ist die Restriktion  $\delta_q, \delta_v, \phi_q, \phi_v < 1$ . Notwendig ist nur, dass die rechten Seiten der Gleichungen (9.11) und (9.15) positiv sind. Einzelne Parameter können auch größer als eins sein (vgl. Li (2000)).

Das bedeutet, dass es sich beim Monopolpreis des Qualitätsführers für keinen anderen Hersteller einer niedrigeren Qualität der gleichen Varietät lohnt, noch zu produzieren.<sup>10</sup> Die genaue Bedingung für eine drastische Innovation folgt weiter unten. Das Maximierungsproblem lautet nun

$$\max_{L_Y, x_{\Omega(j)}(j)} \left\{ \int_0^A [q_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j)]^\beta dj \right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} L_Y^{1-\alpha} - wL_Y - \int_0^A p_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) dj.$$

Zur Vereinfachung der Notation werden folgende Variablen definiert:  $x_{\Omega(j)}(j) \equiv x(j)$  und  $p_{\Omega(j)}(j) \equiv p(j)$  seien die Mengen und Preise der höchsten Qualität  $q_{\Omega(j)}(j) \equiv q(j)$ .

Die Bedingung erster Ordnung für  $x(j)$  liefert die Nachfrage nach Kapitalgut  $x(j)$ :

$$x(j) = \left[ \frac{\alpha Y}{D_Y^\beta} \frac{q(j)^\beta}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (9.20)$$

Die Optimalitätsbedingung bezüglich Arbeit (Arbeitsnachfrage) lautet

$$wL_Y = (1 - \alpha)Y. \quad (9.21)$$

Diese Gleichung gibt zum einen die Arbeitsnachfrage aus dem Endproduktsektor an. Zum anderen besagt sie, dass ein konstanter Anteil,  $1 - \alpha$ , vom Produktionswert von  $Y$  an die Lohnempfänger geht.

Die Hersteller der Kapitalgüter maximieren ebenfalls ihre Gewinne, wobei zur Vereinfachung  $\pi_{\Omega(j)}(j) \equiv \pi(j)$  definiert wird:  $\max_{x(j)} \pi(j) = p(j)x(j) - rK(j) = [p(j) - r]x(j)$ . Mit der Nachfrage aus (9.20) folgt

$$\max_{p(j)} \pi(j) = [p(j) - r] \left[ \frac{\alpha Y}{D_Y^\beta} \frac{q(j)^\beta}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Der sich ergebende Preis ist ein Aufschlag auf die Grenzkosten

$$p(j) = \frac{r}{\beta}. \quad (9.22)$$

Der Parameter  $\beta$ , der die Substituierbarkeit zwischen Kapitalgütern aus verschiedenen Produktlinien determiniert, bestimmt auch den Preisaufschlag, den ein Monopolist verlangen kann. Ein kleiner Wert von  $\beta$  bedeutet eine schlechte Substituierbarkeit zwischen den Varietäten. Endprodukthersteller können bei

---

<sup>10</sup>Siehe Appendix 7.7 oder Tirole (1988, Kapitel 10.1.3).

einem Preisanstieg eines Kapitalgutes nur schlecht ausweichen, weshalb die Monopolisten einen hohen Aufschlag verlangen können.<sup>11</sup>

Die Annahme einer drastischen Innovation bedeutet, dass dieser Preis kleiner sein muss als das  $\lambda$ -fache der Stückkosten des direktesten Konkurrenten der gleichen Varietät (der Produzent mit der nächsthöheren Qualität), weil die beste Qualität  $\lambda$ -mal so gut ist wie diese:

$$p_{\Omega(j)}(j) < \lambda p_{\Omega(j)-1}(j).$$

Der niedrigste Preis, bei dem der Konkurrent gerade keine Verluste macht, entspricht seinen Grenzkosten,  $r$ . Damit ergibt sich folgende Bedingung für drastische Innovationen:

$$\beta\lambda > 1.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann spricht man von einer nicht-drastischen Innovation. Es ist dann nötig, weitere Annahmen über das Verhalten der Kapitalgüterproduzenten zu machen (Duopol oder „limit pricing“ des Qualitätsführers). Das macht das Modell komplizierter, verspricht aber keine substantiellen Einsichten zu liefern.

Aus (9.20) ergibt sich eine relative Nachfrage zwischen einem Kapitalgut  $j$  und einem anderen,  $j'$ :

$$\frac{x(j)}{x(j')} = \left[ \frac{q(j)}{q(j')} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (9.23)$$

Die relative Nachfrage hängt im Gleichgewicht nur von den beiden Qualitätsniveaus ab, weil die Preise für die zwei Güter gleich sind. Einsetzen von  $x(j)$  in die Produktionsfunktion von  $Y$  und Umformen ergibt mit (9.4)

$$x(j) = \left( \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} q(j)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (AQ)^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (9.24)$$

Je höher die Qualität eines Produktes  $j$  ist, umso größer ist die Nachfrage danach, weil der Preis einheitlich ist. Diese Gleichung und den Ausdruck für die Preise, Gleichung (9.22), in die Gewinnfunktion der Kapitalgüterproduzenten,  $\pi(j) = [p(j) - r]x(j)$ , eingesetzt liefert

$$\pi(j) = r \frac{1-\beta}{\beta} \left( \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} q(j)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (AQ)^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (9.25)$$

---

<sup>11</sup>Beispielsweise ist bei  $\beta = 0,1$  die Substitutionselastizität  $10/9$  und der Preis wäre, falls es sich um eine drastische Innovation handelt, das Zehnfache der Grenzkosten. Bei  $\beta = 0,5$  ist Substitutionselastizität gleich zwei und damit größer. Der Preisaufschlag beträgt nur noch 100% auf die Grenzkosten.

Der Gewinn eines Produzenten steigt mit dem aggregierten Output,  $Y$ , und fällt mit zunehmender Produktvielfalt,  $A$ , und mit steigendem Qualitätsindex,  $Q$ , weil dann neue und bessere Produkte verfügbar werden, die von den Endproduktherstellern stattdessen eingesetzt werden. Außerdem steigt der Gewinn mit der eigenen Qualität,  $q(j)$ , weil bei konstanten Preisen die abgesetzten Mengen steigen, die Kosten wegen gleicher Inputkoeffizienten (eine Einheit Rohkapital liefert eine Einheit des Kapitalgutes) aber unverändert bleiben.

Einsetzen der Nachfrage nach Kapitalgut  $j$ , Gleichung (9.24), in die Definition des Kapitalstocks,  $K \equiv \int_0^A x(j) dj$ , ergibt

$$K = \left( \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (AQ)^{-\frac{1}{\beta}} \int_0^A q(j)^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj.$$

Weil der Integralausdruck wieder  $AQ$  entspricht (siehe Gleichung (9.4)), folgt

$$K = \left( \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (AQ)^{\frac{\beta-1}{\beta}}. \quad (9.26)$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$Y = L_Y^{1-\alpha} K^{\alpha} (AQ)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta}}. \quad (9.27)$$

Aus dieser Gleichung kann die Wachstumsrate des Outputs,  $Y$ , abgeleitet werden:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (1-\alpha) \frac{\dot{L}_Y}{L_Y} + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{Q}}{Q} \right). \quad (9.28)$$

Der Kapitalstock,  $K$ , und die Produktion des Endproduktes,  $Y$ , wachsen mit der gleichen Rate: Für das Verhältnis vom Kapitalstock zum Output lässt sich eine einfache Beziehung aus der Nullgewinnbedingung in der Güterproduktion von  $Y$  herleiten. Der Umsatz entspricht den Lohnkosten und den Ausgaben für die Kapitalgüter:  $Y = wL_Y + p \int_0^A x(j) dj$ . In dieser Gleichung wurde verwendet, dass die Preise für die Kapitalgüter einheitlich sind:  $p(j) = p$  (siehe (9.22)). Außerdem besagt Gleichung (9.21), dass der Anteil  $(1-\alpha)$  des Produktionswertes von  $Y$  für die Löhne aufgewendet wird:  $wL_Y = (1-\alpha)Y$ . Mit der Definition des Kapitalstocks,  $K \equiv \int_0^A x(j) dj$ , folgt  $\alpha Y = pK$ . Einsetzen von (9.22) ergibt

$$\kappa \equiv \frac{K}{Y} = \frac{\alpha\beta}{r}. \quad (9.29)$$

Der Zins ist im Steady state konstant. Damit ist auch das Verhältnis von  $K$  zu  $Y$  konstant.  $K$  und  $Y$  wachsen mit der gleichen Rate.



Im Steady state muss  $L_Y$  mit der gleichen Rate wie die Bevölkerung wachsen. Damit folgt für Gleichung (9.28) für einen Steady state

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} (g_A + g_Q) + n.$$

Die Pro-Kopf-Wachstumsrate des Outputs ( $\dot{y}/y = \dot{Y}/Y - n$ ) ist proportional zur Summe der Wachstumsraten der Anzahl der Produkte,  $g_A$ , und der durchschnittlichen Qualität der Produkte,  $g_Q$ . Einsetzen der Wachstumsraten von  $A$  und  $Q$ , Gleichungen (9.11) und (9.15), ergibt

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\alpha(1-\beta)(\delta_q - \delta_v + \phi_v - \phi_q)}{\beta(1-\alpha)Z} n. \quad (9.30)$$

Unter den in (9.19) gemachten Einschränkungen für die Parameter  $\delta_q$ ,  $\delta_v$ ,  $\phi_q$ , und  $\phi_v$ , die die Stärke der Wissens-Spillover angeben, ist diese Wachstumsrate positiv. Analog zum Jones-Modell ist sie umso höher, je höher die Wachstumsrate der Bevölkerung ist.

Wird der folgende Technologieindex definiert,

$$(AQ)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}} \equiv T,$$

dann folgt aus Gleichung (9.27), dass sich die komplexe Produktionsfunktion hier,

$$Y(t) = \left\{ \int_0^{A(t)} \left[ \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} q_{\omega}(j) x_{\omega}(j) \right]^{\beta} dj \right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} L_Y(t)^{1-\alpha},$$

wieder in eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion mit Arbeit-vermehrendem technischen Fortschritt, wie sie z.B. im Solow-Modell verwendet wird, reduzieren lässt:

$$Y = K^{\alpha} (TL_Y)^{1-\alpha}.$$

Wie im Solow-Modell kann das Inlandsprodukt pro Kopf langfristig (d.h. im Steady state) nicht durch Kapitalakkumulation ( $g_K > 0$ ) alleine wachsen. Erst technischer Fortschritt, im Modell verkörpert in einer größeren Vielfalt und besseren Qualitäten an Kapitalgütern, sichert steigenden Wohlstand. Das vorliegende Modell kann als neoklassisches Wachstumsmodell verstanden werden, in dem der technische Fortschritt endogen erklärt wird, aber ohne die kontra-faktischen Implikationen des Romer-Qualitäten-Modells aus Kapitel 7 aufzuweisen. Es ist ein weiterer Schritt zur Entwicklung einer einheitlichen Wachstumstheorie, wie sie von Dinopoulos & Sener (2006) gefordert wird:

„ ... scale-invariant Schumpeterian growth models with endogenous technological change represent one more step towards a unified growth theory which would eventually combine the insights of neoclassical and Schumpeterian growth theories.“

Solow selbst sieht die Modelle der endogenen Wachstumstheorie als neoklassische Modelle an (Solow 2005):

„In the broad sense ... the 'endogenous growth' models of Romer and Lucas and their many successors are entirely neoclassical.“

### 9.3.4 Allokation von Arbeit

Es verbleibt, die Allokation von Arbeit auf die drei Verwendungen – zur Produktion des Endproduktes,  $Y$ , oder in den beiden Forschungssektoren – zu bestimmen. Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt bedeutet  $L(t) = L_Y(t) + L_v(t) + L_Q(t)$ . Weil die Bevölkerung wächst, ist es bequemer, diese Gleichgewichtsbedingung in Arbeitsanteilen anzugeben:

$$1 = \frac{L_Y}{L} + \frac{L_v}{L} + \frac{L_Q}{L}.$$

Aus Gewinnmaximierung im Endproduktsektor folgt die Nachfrage nach Arbeit, Gleichung (9.21):

$$L_Y = \frac{(1 - \alpha)Y}{w}.$$

Die Nachfrage nach Arbeit aus dem Varietäten-Forschungssektor ergibt sich aus (9.5):

$$L_v = \frac{a_v g_A}{A^{\phi_v-1} Q^{\delta_v-1}} = \frac{a_v g_A L}{C_v}, \quad (9.31)$$

wobei  $C_v$  wie folgt definiert wurde:

$$C_v = A^{\phi_v-1} Q^{\delta_v-1} L. \quad (9.32)$$

Der Forschungssektor, der Qualitätenverbesserungen betreibt, hat die Arbeitsnachfrage aus (9.14):

$$L_Q = \frac{a_q g_Q}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) A^{\phi_q-1} Q^{\delta_q-1}} = \frac{a_q g_Q L}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) C_q}, \quad (9.33)$$

mit  $C_q$  als

$$C_q = A^{\phi_q-1} Q^{\delta_q-1} L. \quad (9.34)$$

Die einzelnen Arbeitsnachfragen in die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt ergibt mit  $\gamma \equiv Y/(wL)$ :

$$1 = (1 - \alpha)\gamma + \frac{a_v g_A}{C_v} + \frac{a_q g_Q}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) C_q}. \quad (9.35)$$

Aus (9.21) ist ersichtlich, dass  $\gamma$  in einem Steady state konstant ist ( $L_Y$  wächst mit Rate  $n$ ). Aus (9.11) und (9.15) folgt, dass auch  $C_v$  und  $C_q$  im Steady state konstant sein müssen. Die Wachstumsraten  $g_A$  und  $g_Q$  sind mit (9.16) und (9.17) festgelegt. Damit bleiben die Variablen  $\gamma$ ,  $C_v$ , und  $C_q$  zu bestimmen. Diese legen die relativen Arbeitsanteile von  $L_Y$ ,  $L_v$  und  $L_Q$  fest. Zwei weitere Gleichungen zur Arbeitsmarkt-Gleichgewichtsbedingung (9.35) in den gesuchten Variablen folgen aus den beiden Arbitragegleichungen für den Kapitalmarkt und werden nun hergeleitet.

Im Forschungssektor herrscht freier Marktzutritt. Eine Innovation – egal ob es eine neue Varietät ist oder eine bessere Qualität eines bestehenden Produktes – wird wertlos, wenn eine bessere Qualität erfunden wird. Forschungsfirmer maximieren über die Wahl des Arbeitseinsatzes ihre Gewinne. Das Gewinnmaximierungskalkül für Firmen, die neue Produkte (Varietäten) erfinden, lautet

$$\max_{L_v(t)} P_{A,v}(t) \dot{A}(t) - wL_v(t).$$

$P_{A,v}$  ist der Wert eines Patents für ein neues Kapitalgut,  $\dot{A}$  die Anzahl an neuen Patenten. Einsetzen von (9.5) und Ableiten nach  $L_v(> 0)$  ergibt den Patentwert

$$P_{A,v}(t) = \frac{a_v w(t) Q(t)}{B_v(t)} \quad (9.36)$$

mit

$$B_v(t) \equiv A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v}. \quad (9.37)$$

Forschungsunternehmen, die die Qualität bestehender Produkte verbessern, maximieren

$$\max_{L_q(j,t)} P_{A,q}(j,t) I(j,t) - wL_q(j,t),$$

mit  $P_{A,q}(j,t)$  als Wert eines Patents, wenn die Verbesserung gelingt in Sektor  $j$  und  $I(j,t)$  als der Wahrscheinlichkeit für das Gelingen. Mit (9.6) folgt ein Patentwert

$$P_{A,q}(j,t) = \frac{a_q w(t) q(j,t)^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{B_q(t)}. \quad (9.38)$$

Hier wurde  $B_q$  als

$$B_q(t) \equiv A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q} \quad (9.39)$$

definiert und  $q_{\Omega(j)}(j, t) = q(j, t)$  verwendet.

Im Kapitalmarktgleichgewicht muss die erwartete Rendite aus einem Patent dem Zins  $r$  entsprechen, weil spezifische Risiken vollständig diversifizierbar sind. Die Arbitrage-Bedingung für Firmen mit Qualitäten-F&E lautet

$$r(t) = \frac{\dot{P}_{A,q}(j, t)}{P_{A,q}(j, t)} + \frac{\pi(j, t)}{P_{A,q}(j, t)} - I(j, t). \quad (9.40)$$

Sie muss für jede Produktlinie  $j$  gelten.

Aus (9.38) folgt außerdem

$$\frac{\dot{P}_{A,q}}{P_{A,q}} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q}. \quad (9.41)$$

$\dot{P}_{A,q}$  ist hier die Wertänderung, wenn keine Qualitätsverbesserung stattfindet. Deshalb ist  $q(j)$  beim Ableiten von Gleichung (9.38) konstant. Aus den gleichen Gründen wie in Kapitel 7.3 („Arrow-Effekt“ oder „replacement-effect“) betreibt ein Qualitätsführer keine weitere Forschung. Die Qualität wird immer nur von „Outsidern“ verbessert. Dann wird das Patent für den bisherigen Qualitätsführer wertlos. Aus (9.41) folgt, dass die Wachstumsrate der Patentwerte,  $\dot{P}_{A,q}(j, t)/P_{A,q}(j, t)$ , also der Kapitalgewinn, für alle Varietäten  $j$  gleich ist.

Außerdem ist die „Dividendenrendite“,  $\pi(j, t)/P_{A,q}(j, t)$ , für alle Produktlinien gleich. Durch Einsetzen der Gewinnleichung (9.25) und des Ausdrucks für den Patentwert, Gleichung (9.38), folgt für die Dividendenrendite, dass sie unabhängig von  $j$  ist:

$$\frac{\pi(j)}{P_{A,q}(j)} = \frac{(1 - \beta)rY^{\frac{1}{\alpha}}B_q}{a_q\beta w L_Y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(AQ)^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (9.42)$$

Weil sowohl die Dividendenrendite als auch die Kapitalgewinne in allen Sektoren gleich sind und der Zins in der Ökonomie einheitlich ist, folgt, dass die Arbitragegleichung (9.40) nur dann gleichzeitig für alle Sektoren  $j$  erfüllt sein kann, wenn  $I(j, t)$  für alle Sektoren gleich ist:

$$I(j, t) = I(t).$$

Die vorne gemachte Behauptung, Gleichung (9.12), ist damit bewiesen. Produktlinien, in denen bereits viele Qualitätsverbesserungen stattgefunden haben, weisen hohe Gewinne für die Kapitalgüterproduzenten auf (siehe Gleichung (9.25)):

$\partial\pi(j)/\partial q(j) > 0$ . Damit folgt, dass der Wert eines Patentes umso höher ist, je höher die Qualität ist, zu deren Produktion das Patent berechtigt (siehe Gleichung (9.38)). Wegen freien Marktzutritts muss im Gleichgewicht  $wL_q(j) = IP_{A,q}(j)$  gelten: Der (zu erwartende) Ertrag aus Forschung – mit Wahrscheinlichkeit  $I$  ist die Firma erfolgreich und erhält dann ein Patent mit Wert  $P_{A,q}(j)$  – muss den Kosten der Forschung entsprechen. Ist also die Qualität einer Produktlinie  $j$  hoch, dann verspricht erfolgreiche Forschung eine hohe „Belohnung“ in Form eines wertvollen Patents. Deshalb wird auch die Forschungsanstrengung,  $L_q(j)$ , groß sein. Allerdings verbessert der höhere Arbeitseinsatz die Erfolgswahrscheinlichkeit von Forschung nicht: Je höher die Qualität eines Kapitalgutes ist, desto schwieriger wird es, sie weiter zu erhöhen (siehe (9.6)). Dieser negative externe Effekt gleicht den höheren Arbeitseinsatz gerade aus.

Eine Anmerkung: Bei der Herleitung hier wurde  $I(j, t) = I(t)$  nicht schon als Annahme vorausgesetzt. Weder bei der Herleitung des Patentwertes (und dessen Wachstumsrate) noch bei der Bestimmung der Gewinne wurde Symmetrie bezüglich der Forschungsintensitäten angenommen.  $I(j, t) = I(t)$  muss also in einem Gleichgewicht gelten.

Der Ausdruck für die Dividendenrendite, Gleichung (9.42), kann vereinfacht werden. Einsetzen von (9.39), (9.26) und (9.34) ergibt

$$\frac{\pi(j)}{P_{A,q}(j)} = r \frac{1-\beta}{a_q\beta} \frac{K}{Y} \frac{Y}{wL} C_q.$$

Mit den Definitionen  $\kappa \equiv K/Y$  und  $\gamma \equiv Y/(wL)$  folgt

$$\frac{\pi(j)}{P_{A,q}(j)} = r \frac{1-\beta}{a_q\beta} \kappa\gamma C_q.$$

Diese Gleichung, den Ausdruck für die Kapitalgewinne, Gleichung (9.41), und  $I(j) = I$  in (9.40) eingesetzt, ergibt

$$r = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I + r \frac{1-\beta}{a_q\beta} \kappa\gamma C_q.$$

Durch Auflösen nach dem Zinssatz,  $r$ , kann die Arbitragegleichung schließlich folgendermaßen geschrieben werden:

$$r = \frac{1}{1 - \frac{(1-\beta)C_q}{a_q\beta} \kappa\gamma} \left( \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I \right). \quad (9.43)$$

Die Arbitrage-Bedingung für Patente aus Varietäten-F&E lautet:

$$r(t) = \frac{\dot{P}_{A,v}(t)}{P_{A,v}(t)} + \frac{\pi_0(j, t)}{P_{A,v}(t)} - I(t), \quad (9.44)$$

wobei  $\pi_0(j, t)$  den Gewinn einer neuen Varietät darstellt, wenn also noch keine Qualitätsverbesserungen stattgefunden haben. Neue Produkte haben die Basis-Qualität  $q_0(j, t) = Q(t)^{(1-\beta)/\beta}$ . Die Gewinne betragen somit gemäß Gleichungen (9.25) und (9.26)

$$\pi_0(j) = r \frac{1-\beta}{\beta} \left( \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} Q(AQ)^{-\frac{1}{\beta}} = r \frac{1-\beta}{\beta} \frac{K}{A}.$$

Mit der Definitionen (9.37), (9.32),  $\kappa \equiv K/Y$  und  $\gamma \equiv Y/(wL)$ , dem Patentwert in (9.36) und  $\pi_0(j)$  lautet der Ausdruck für die Dividendenrendite:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_0(j)}{P_{A,v}} &= r \frac{1-\beta}{a_v \beta} \frac{KA^{\phi_v-1} Q^{\delta_v-1} L}{wL} \\ &= r \frac{1-\beta}{a_v \beta} \frac{K}{Y} \frac{Y}{wL} C_v \\ &= r \frac{1-\beta}{a_v \beta} \kappa \gamma C_v. \end{aligned}$$

Aus (9.36) kann ein Ausdruck für die Entwicklung des Wertes von Varietäten-Patenten hergeleitet werden:

$$\frac{\dot{P}_{A,v}}{P_{A,v}} = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v}. \quad (9.45)$$

Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die Arbitragegleichung (9.44) und Umformen ergibt schließlich

$$r = \frac{1}{1 - \frac{(1-\beta)C_v}{a_v \beta} \kappa \gamma} \left( \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v} - I \right). \quad (9.46)$$

In den drei Gleichungen (9.35), (9.43) und (9.46) sind folgende Variablen noch zu bestimmen:  $\gamma$ ,  $C_q$ ,  $C_v$ ,  $\kappa$ ,  $I$ ,  $\dot{w}/w$ ,  $\dot{B}_q/B_q$ , und  $\dot{B}_v/B_v$ . Als nächstes wird gezeigt, dass alle außer  $\gamma$ ,  $C_q$  und  $C_v$  über die Wachstumsraten  $g_y$ ,  $g_A$  oder  $g_Q$  und damit über exogene Parameter festgelegt sind.

Die Wachstumsraten von  $B_q$  und  $B_v$  sind offensichtlich nur von  $g_A$ ,  $g_Q$  und Parametern abhängig (siehe (9.39) und (9.37)).

Das Verhältnis von Kapitalstock zu Output,  $\kappa$ , ist über Gleichung (9.29) vom Zins,  $r$ , abhängig. Der Zinssatz in den letzten beiden Gleichungen wird über die Ramsey-Regel bestimmt:  $r = \sigma \dot{c}/c + \rho$ . Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Gütermarkt,  $Y = cL + \dot{K}$ , ergibt sich, dass der Pro-Kopf-Konsum im Steady state mit der gleichen Rate wie der Output pro Kopf wächst:

$$\frac{c}{Y/L} = \frac{cL}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K} \frac{K}{Y}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist konstant, weil  $K$  und  $Y$  mit der gleichen Rate wachsen. Deshalb muss auch die linke Seite konstant sein. Der Konsum pro Kopf,  $c$ , und der Output pro Kopf,  $y$ , wachsen mit der gleichen Rate

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{y}}{y}. \quad (9.47)$$

Damit folgt, dass sowohl der Zins,  $r$ , als auch das Verhältnis von Kapitalstock zu Output,  $\kappa$ , über die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Output,  $\dot{y}/y$ , in Gleichung (9.30) festgelegt werden.

Die Wachstumsrate des Lohnsatzes entspricht auch  $\dot{y}/y$ , was aus (9.21) klar wird. Die Innovationsrate,  $I$ , in Gleichung (9.13) wird über  $g_Q$  in Gleichung (9.17) festgelegt.

Damit folgt, dass in den drei Gleichungen (9.35), (9.43) und (9.46) nur noch die drei Variablen  $\gamma$ ,  $C_q$  und  $C_v$  zu bestimmen sind. Diese legen dann die Arbeitsanteile in der  $Y$ -Produktion und den zwei Forschungssektoren fest. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Arbeitsanteile  $L_Y/L$ ,  $L_Q/L$  und  $L_v/L$  zwischen null und eins liegen.<sup>12</sup>

Zur Beweisführung und der Vollständigkeit der Analyse werden noch die Parameterbereiche bestimmt, für die die Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

Die Transversalitätsbedingung, mit  $B(t)$  als Wertpapierbestand der Haushalte und  $\xi(t)$  als Schattenpreis von Kapital, lautet (siehe Gleichung (9.9)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [B(t)\xi(t)] = 0.$$

Die Wachstumsrate des Produkts  $B(t)\xi(t)$  muss negativ sein:

$$\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{\xi}}{\xi} < 0. \quad (9.48)$$

---

<sup>12</sup>Eine konkrete Berechnung der Arbeitsanteile ist prinzipiell möglich, stellt aber keine interessanten Ergebnisse in Aussicht. Deshalb wird darauf verzichtet.

Der Wertpapierbestand der Haushalte setzt sich zusammen aus den gehaltenen Anteilen an den Kapitalgutproduzenten und den Ansprüchen auf den Kapitalstock,  $K$ :

$$B(t) = K(t) + A_v(t)\bar{P}_{A,v}(t) + A_q(t)\bar{P}_{A,q}(t).$$

Hierbei ist  $A_v$  die Masse der Kapitalgutproduzenten, die Kapitalgüter in der Basis-Qualität herstellt. Der durchschnittliche Wert dieser Firmen zum Zeitpunkt  $t$  ist  $\bar{P}_{A,v}(t)$ . Die Masse der Kapitalgutproduzenten, die erfolgreich die Qualität verbessert haben und Qualitätsführer in ihrer Produktlinie sind, sei  $A_q$ . Der durchschnittliche Wert dieser Produzenten zum Zeitpunkt  $t$  ist  $\bar{P}_{A,q}(t)$ .

Im Appendix zu diesem Kapitel wird gezeigt, dass sowohl der aggregierte Wert der Varietäten-Firmen als auch der aggregierte Wert der Qualitäten-Firmen, mit der Rate  $g_Y$  wächst. Aus Gleichung (9.29) folgt, dass auch der Kapitalstock mit dieser Rate wächst, weil der Zins konstant ist. Also wächst der gesamte Wertpapierbestand der Haushalte mit der gleichen Rate wie der Output:

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y} + n. \quad (9.49)$$

Die Wachstumsrate des Schattenpreises,  $\xi(t)$ , ergibt sich aus der Optimalitätsbedingung (9.7) und Gleichung (9.47):

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = -\sigma \frac{\dot{y}}{y} - \rho. \quad (9.50)$$

Einsetzen von (9.49) und (9.50) in (9.48) ergibt dann folgende Bedingung:<sup>13</sup>

$$\rho > (1 - \sigma) \frac{\dot{y}}{y} + n. \quad (9.51)$$

Diese Ungleichung ist gleichzeitig wieder die Bedingung dafür, dass der Nutzen des Haushalts nicht unendlich groß wird, d.h. für Konvergenz des Nutzenintegrals. Mit  $L(t) = L(0) \exp(nt)$  lautet die intertemporale Nutzenfunktion

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} L(0) e^{nt} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} dt.$$

Damit das Integral konvergiert, muss der Integrand mit negativer Rate wachsen:  $-\rho + n + (1 - \sigma)\dot{c}/c < 0$ . Mit (9.47) ist dies äquivalent zu (9.51).

<sup>13</sup>Häufig wird logarithmischer Nutzen unterstellt (d.h.  $\sigma = 1$ ). Dann ist es hinreichend, wenn die Bevölkerungswachstumsrate,  $n$ , kleiner ist als die Diskontrate,  $\rho$ , damit die Transversalitätsbedingung erfüllt ist.



Jetzt kann gezeigt werden, dass die Arbeitsanteile unter den gemachten Parameterrestriktionen (insbesondere der durch die Transversalitätsbedingung auferlegten) zwischen null und eins liegen. Gleichung (9.43) wird dazu nach  $C_q$  aufgelöst:

$$C_q = \left(1 - \frac{D_1}{r}\right) \frac{a_q \beta}{(1 - \beta) \kappa \gamma}, \quad (9.52)$$

mit der Definition

$$D_1 = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I. \quad (9.53)$$

Analog folgt aus (9.46)

$$C_v = \left(1 - \frac{D_2}{r}\right) \frac{a_v \beta}{(1 - \beta) \kappa \gamma}, \quad (9.54)$$

mit

$$D_2 = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v} - I. \quad (9.55)$$

Einsetzen von Gleichungen (9.52) und (9.54) in die Gleichgewichtsbedingung für den Arbeitsmarkt, Gleichung (9.35), ergibt

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \alpha + \frac{g_A(1 - \beta)\kappa}{\left(1 - \frac{D_1}{r}\right)\beta} + \frac{g_Q(1 - \beta)\kappa}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right)\left(1 - \frac{D_2}{r}\right)\beta}.$$

Im Anhang zu diesem Kapitel wird gezeigt, dass  $r > D_1$  und  $r > D_2$  gilt. Damit sind der zweite und dritte Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung positiv. Gleiches gilt für  $1 - \alpha$ , weil  $\alpha$  per Annahme zwischen null und eins liegt. Die linke Seite muss also auch positiv sein und damit:  $\gamma > 0$ . Aus der Arbeitsnachfrage im Endproduktsektor, Gleichung (9.21), und der Definition von  $\gamma$  folgt:

$$\frac{L_Y}{L} = (1 - \alpha)\gamma \quad (> 0).$$

Weil  $r > D_1$  gilt, folgt aus (9.52), dass auch  $C_q$  positiv ist. Für die Arbeitsnachfrage aus dem Qualitäten-Forschungssektor, Gleichung (9.14), gilt somit

$$\frac{L_Q}{L} = \frac{a_q g_Q}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) C_q} \quad (> 0).$$

Als Letztes zum Arbeitsanteil in Varietäten-Forschung. Aus Gleichung (9.54) folgt, dass  $C_v > 0$  gilt, weil  $r > D_2$  ist. Damit ist auch die Arbeitsnachfrage aus dem Varietäten-Forschungssektor, Gleichung (9.31), positiv:

$$\frac{L_v}{L} = \frac{a_v g_A}{C_v} \quad (> 0).$$

Die einzelnen Arbeitsanteile  $L_Y/L$ ,  $L_Q/L$  und  $L_v/L$  sind also alle jeweils positiv. Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt bedeutet, dass die Summe der drei Anteile gleich eins ist. Daraus folgt, dass keiner der Anteile größer als eins sein kann, weil dann einer der anderen Anteile negativ sein müsste. Damit ist bewiesen, dass jeder Arbeitsanteil zwischen null und eins liegt.

## 9.4 Schluss

In diesem Kapitel wurde das Romer-Qualitäten-Modell aus Kapitel 7 dahingehend erweitert, dass horizontale Innovationen aus einem Varietäten-Forschungssektor zugelassen werden. Außerdem wurden die Forschungstechnologien modifiziert. Dieses neue Modell hat mehrere Vorteile: (i) Dadurch, dass sowohl neue als auch bessere Produkte durch gewollte, profitorientierte Forschung möglich sind, wird eine wichtige Tatsache realer Ökonomien modelliert. (ii) Wie in den anderen Schumpeterschen Modellen kommt es auch hier zu kreativer Zerstörung. Produkte werden obsolet, wenn bessere entwickelt werden. (iii) Skaleneffekte werden eliminiert. Die Wachstumsrate des technischen Wissens (und des Outputs) hängt nur noch von Größen ab, die schwer zugänglich für Politikmaßnahmen sind, wie die Bevölkerungswachstumsrate (oder, falls  $L$  nicht als Bevölkerung, sondern als Bestand an Humankapital integriert wird, von der Zunahme dieses Humankapitals). (iv) Trotz der komplexen mikroökonomischen Fundierung kann die Produktionsfunktion in eine Cobb-Douglas-Form mit  $L_Y$ ,  $K$  und technischem Wissen als Argumenten gebracht werden, die identisch ist zu der in neoklassischen Modellen oft verwendeten. (v) Im Vergleich zum Modell von Li (2000) ist dieses vorteilhaft, weil Kapital ein notwendiger Input in der Produktion ist und Kapitalakkumulation möglich ist.

## 9.5 Appendix: Vergleich der Produktionsfunktionen von $Y$ aus Kapitel 7 und 9

In diesem Appendix wird gezeigt, dass die Produktionsfunktion von  $Y$  aus Kapitel 7 ein Spezialfall der in diesem Kapitel verwendeten ist. Wenn  $\beta$  gegen null geht und es eine Masse von eins an verschiedenen Produktlinien gibt, wird der Kapital-Qualitäten-Index  $D_Y$  aus Kapitel 7, Gleichung (7.2), zum Index, der in diesem Kapitel verwendet wird, Gleichung (9.2). Logarithmieren von (9.2) unter der Annahme, dass nur die besten Qualitäten einer Varietät eingesetzt werden und  $A = 1$  ist, ergibt<sup>14</sup>

$$\ln D_Y = \frac{\ln \left\{ \int_0^1 [q(j)x(j)]^\beta dj \right\}}{\beta}.$$

Für  $\beta = 0$  ist die Funktion nicht definiert. Mit Hilfe der Regel von L'Hôpital<sup>15</sup> kann dennoch eine Lösung für  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \ln D_Y$  gefunden werden.

<sup>14</sup>Zur Vereinfachung wieder mit  $q_{\Omega(j)}(j) \equiv q(j)$  und  $x_{\Omega(j)}(j) \equiv x(j)$ .

<sup>15</sup>Häufig ist man an einer Lösung des Quotienten aus  $f(x)$  und  $g(x)$  interessiert, wenn  $x$  gegen einen bestimmten Wert  $b$  geht, wobei allerdings  $f(b) = g(b) = 0$  ist. Man hätte also einen nicht lösbaren Ausdruck  $0/0$ . Trick: Erweitere den Bruch folgendermaßen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{[f(x) - f(b)]}^{=0}}{[g(x) - \underbrace{g(b)}_{=0}]} \cdot \frac{1}{(x-b)/(x-b)}.$$

Bei einer Grenzwertbetrachtung mit  $x \rightarrow b$  folgt

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\frac{f(x)-f(b)}{x-b}}{\frac{g(x)-g(b)}{x-b}}.$$

Der Zähler der rechten Seite der letzten Gleichung wird zu  $f'(b)$ , der Nenner zu  $g'(b)$ . (Dieser Übergang ist etwas ungenau. Streng genommen müsste Cauchys Mittelwertsatz angewendet werden: Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $(b, c)$  differenzierbare Funktionen. Dann ist die Funktion  $h(x) = f(x) - mg(x)$  auch differenzierbar, wobei  $m$  folgendermaßen definiert wird:  $m \equiv [f(c) - f(b)]/[g(c) - g(b)]$ . Daraus folgt, dass  $h(b) = h(c)$  gilt. Weil  $h$  eine kontinuierliche Funktion ist, muss sie irgendwo zwischen  $b$  und  $c$  ein lokales Maximum oder Minimum haben: Es gibt also einen Punkt  $d$  im Intervall  $(b, c)$ , für den  $h'(d) = 0 = f'(d) - mg'(d)$  gilt. Einsetzen von  $m$  ergibt:  $f'(d)/g'(d) = [f(c) - f(b)]/[g(c) - g(b)]$ . Geht nun  $c$  gegen  $b$ , dann geht auch  $d$  gegen  $b$  und die Behauptung, dass der Zähler zu  $f'(b)$ , der Nenner zu  $g'(b)$  wird, ist richtig.) Zusammenfassend nochmal die Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \quad \text{für} \quad f(b) = g(b) = 0 \quad \text{und} \quad g'(b) \neq 0.$$

Sei der Ausdruck im Zähler definiert als  $f(\beta)$ , der Nenner als  $g(\beta)$ . Dann besagt die Regel von L'Hôpital, dass, wenn beide Funktionen  $f(\beta)$  und  $g(\beta)$  gegen null gehen, wenn  $\beta$  gegen null geht, folgendes gilt:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \ln D_Y = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}.$$

Wegen  $g'(\beta) = 1$  folgt

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \ln D_Y = \frac{\int_0^1 [q(j)x(j)]^\beta \ln[q(j)x(j)] dj}{\int_0^1 [q(j)x(j)]^\beta dj}.$$

Ausgewertet bei  $\beta = 0$  wird der Ausdruck  $[q(j)x(j)]^\beta$  gleich eins, so dass der Nenner zu eins wird. Damit folgt

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \ln D_Y = \int_0^1 \ln[q(j)x(j)] dj.$$

Mit  $q(j) = \lambda^{\Omega(j)}$  ergibt sich  $D_Y$  aus Kapitel 7, Gleichung (7.2), und damit die Produktionsfunktion (7.1).

## 9.6 Appendix: Herleitung der Wachstumsrate von $Q(t)$

Gleichung (9.13) besagt, dass die Wachstumsrate der durchschnittlichen Qualität,  $g_Q$ , abhängig ist von der Forschungsintensität in Qualitäten-F&E. Dieser Zusammenhang folgt direkt durch Ableiten der Definition von  $Q$  aus Gleichung (9.4),

$$Q(t) = \frac{1}{A(t)} \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j) dj,$$

nach der Zeit (unter Verwendung der Leibniz-Regel):

$$\dot{Q}(t) = \frac{\int_0^{A(t)} \left[ q_{\Omega(j)+1}^{\frac{\beta}{1-\beta}} - q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right] I(j, t) dj}{A(t)} + \frac{\dot{A}(t) q_{\Omega(A)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(A, t)}{A(t)} - \frac{\dot{A} \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj}{[A(t)]^2}.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern gibt die Veränderung von  $q^{\beta/(1-\beta)}(j)$  an, wenn eine Verbesserung passiert.  $I(j, t)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür und ist für alle Sektoren gleich (siehe (9.12)):  $I(j, t) = I(t)$ . Der erste Bruch steht deshalb für den Einfluss der Qualitätssprünge auf den Index  $Q(t)$  bei einer konstanten Anzahl

an Varietäten,  $A(t)$ . Der zweite Bruch steht für den positiven Effekt zusätzlicher Varietäten auf den Index, der sich dadurch ausdrückt, dass sich die obere Integrationsgrenze nach außen verschiebt. Allerdings wird in  $Q(t)$  über alle Varietäten „gemittelt“, weshalb es auch einen negativen Effekt von zunehmenden Varietäten auf  $Q(t)$  gibt. Dieser wird mit dem letzten Bruch aufgefangen.

Der Ausdruck in eckigen Klammern kann über (9.3) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 q_{\Omega(j)+1}^{\frac{\beta}{1-\beta}} - q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} &= \lambda^{[\Omega(j)+1]\frac{\beta}{1-\beta}} Q(\tau) - \lambda^{\Omega(j)\frac{\beta}{1-\beta}} Q(\tau) \\
 &= \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}\Omega(j)} \left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) Q(\tau) \\
 &= \left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) \left[ \lambda^{\Omega(j)\frac{1-\beta}{\beta}} Q(\tau)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\
 &= \left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}},
 \end{aligned} \tag{9.56}$$

wobei  $Q(\tau)$  die durchschnittliche Qualität zum Zeitpunkt der Erfindung von Varietät  $j$  ist.

Für die Qualität der zuletzt erfundenen Varietät,  $q_{\Omega(A)}$ , gilt

$$q_{\Omega(A)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(A, t) = \left[ \lambda^0 Q(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} = Q(t),$$

weil für diese noch keine Qualitätsverbesserungen stattgefunden haben können.

Wegen (9.4) ist außerdem

$$\int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj = A(t)Q(t).$$

Mit diesen Gleichungen folgt

$$\dot{Q}(t) = \frac{\left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) I(t) \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj}{A(t)} + \frac{\dot{A}(t)Q(t)A(t)}{[A(t)]^2} - \frac{\dot{A}(t)Q(t)A(t)}{[A(t)]^2}.$$

Das Integral ist wieder gleich  $A(t)Q(t)$ . Weil sich die letzten beiden Terme auf der rechten Seite genau aufheben, ergibt sich Gleichung (9.13).

## 9.7 Appendix: Herleitung der Wachstumsrate des Wertpapierbestands

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Wertpapierbesitz der privaten Haushalte mit der gleichen Rate wie der Output wächst. Der Wertpapierbestand setzt

sich zusammen aus den Firmenanteilen der Ökonomie und dem Kapitalbestand,  $K$ , den die Endprodukthersteller in der Produktion einsetzen. Der Wert der Zwischenprodukthersteller resultiert aus den Gewinnen, die sie durch ihre marktbeherrschende Stellung erwirtschaften können, und spiegelt sich in den Patentwerten  $P_A$  wider. Der Wertpapierbestand lautet

$$B(t) = K(t) + A_v(t)\bar{P}_{A,v}(t) + A_q(t)\bar{P}_{A,q}(t). \quad (9.57)$$

$A_v$  und  $A_q$  geben jeweils die Anzahl der Kapitalguthersteller an, die Kapitalgüter in der Basis-Qualität herstellen ( $A_v$ ), bzw. die bereits mindestens eine Verbesserung gemacht haben ( $A_q$ ).  $\bar{P}_{A,v}$  und  $\bar{P}_{A,q}$  sind die Durchschnittswerte der Patente der jeweiligen Firmen.

Im Folgenden wird gezeigt, dass im Steady state jeder Summand auf der rechten Seite der Gleichung mit der Rate  $g_Y$  wächst. Damit wächst auch der Bestand an Wertpapieren,  $B$ , mit dieser Rate.

Dazu wird in einem ersten Schritt gezeigt, dass die Anteile  $A_v$  und  $A_q$  mit der Rate  $g_A$  wachsen. In einem zweiten Schritt folgt der Beweis, dass die durchschnittlichen Patentwerte (Firmenwerte),  $P_{A,v}$  und  $P_{A,q}$ , mit der Rate  $g_Y - g_A$  wachsen. Die Wachstumsrate der beiden rechten Terme ist dann  $g_Y$ .

Dass der aggregierte Kapitalstock auch mit  $g_Y$  wächst, wurde weiter oben bereits gezeigt (siehe Gleichung (9.29) mit  $r = \text{konst.}$ ).

Die Veränderung von  $A_v$  beruht auf zwei Ursachen: Zum einen kommen durch gezielte Forschung neue Produktlinien hinzu. Zum anderen werden Kapitalgüter in der Basis-Qualität durch Qualitäten-Forschung verbessert und gehören nicht mehr zu  $A_v$ , sondern zu  $A_q$ . Dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von  $I$ :  $\dot{A}_v = \dot{A} - IA_v$ . Teilen durch  $A$  auf beiden Seiten ergibt

$$\frac{\dot{A}_v}{A} = g_A - I \frac{A_v}{A}.$$

Ableiten des Verhältnisses  $A_v/A$  nach der Zeit und Einsetzen der letzten Gleichung ergibt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{A_v}{A} \right) = g_A - (I + g_A) \frac{A_v}{A}.$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass das Verhältnis der Hersteller von Basis-Qualitäten an der Gesamtzahl der Produzenten gegen einen konstanten Wert konvergiert: Für kleine Werte von  $A_v/A$  ist die Gleichung positiv, der Anteil

steigt. Für große  $A_v/A$  ist sie negativ, der Anteil fällt.<sup>16</sup> Der Steady-state-Wert lautet

$$\frac{A_v}{A} = \frac{g_A}{I + g_A}.$$

Damit muss  $A_v$  mit der gleichen Rate wie  $A$  wachsen. Weil  $A = A_v + A_q$  und folglich

$$1 = \frac{A_v}{A} + \frac{A_q}{A}$$

gilt, wächst natürlich auch  $A_q$  mit der Rate  $g_A$ . Der rechte Term der letzten Gleichung wäre sonst nicht konstant. Zusammen folgt

$$\frac{\dot{A}_v}{A_v} = \frac{\dot{A}_q}{A_q} = g_A. \quad (9.58)$$

Der durchschnittliche Wert von Firmen, die erfolgreich Qualitäten-Forschung betrieben haben, beträgt

$$\bar{P}_{A,q}(t) = \frac{1}{A_q(t)} \int_0^{A(t)} P_{A,q}(j, t) dj.$$

Dieser Durchschnittswert ändert sich aus zwei Gründen: Erstens ändert sich jeder Patentwert auch ohne eine erfolgreiche Innovation, weil das technische Wissen zunimmt, wie es in Gleichung (9.41) ersichtlich ist. Die Änderungsrate ist dabei für jedes Patent gleich. Zweitens passieren in einzelnen Produktlinien Qualitätsverbesserungen. Dadurch steigen die Gewinne (siehe Gleichung (9.25)) sprunghaft und ebenso die Patentwerte.<sup>17</sup> In der folgenden Gleichung sind beide Effekte durch die beiden Terme auf der rechten Seite ausgedrückt. Der erste Term auf der rechten Seite steht für den ersten Effekt, der zweite für den zweiten Effekt:

$$\frac{\dot{\bar{P}}_{A,q}(t)}{\bar{P}_{A,q}(t)} = \frac{\dot{P}_{A,q}(t)}{P_{A,q}(t)} + \frac{\int_0^{A(t)} \Delta P_{A,q}(j, t) I dj}{\int_0^{A(t)} P_{A,q}(j, t) dj}, \quad (9.59)$$

wobei  $\Delta P_{A,q}(j, t) \equiv P_{A, \Omega(j)+1}(j, t) - P_{A, \Omega(j)}(j, t)$  definiert wurde. Der Wert eines Patents entspricht dem Barwert aller künftigen Gewinne aus (9.25). Damit folgt:

<sup>16</sup>Im Steady state sind  $g_A$  und  $I$  konstant (vgl (9.13)). Die Differentialgleichung ist deshalb zeitautonom und einfach zu lösen.

<sup>17</sup>Zu berücksichtigen ist eigentlich noch einerseits, dass sich die obere Integrationsgrenze,  $A(t)$ , nach außen verschiebt. Andererseits wächst auch der Anteil  $A_q$ , über den gemittelt wird. Beide Effekte heben sich aber exakt auf, wie oben in Gleichung (9.58) gezeigt wurde.

$$\begin{aligned}
\Delta P_{A,q}(j, t) &= \int_t^\infty [\pi_{\Omega(j)+1}(\tau) - \pi_{\Omega(j)}(\tau)] e^{-(r+I)(\tau-t)} d\tau \\
&= \int_t^\infty r \frac{1-\beta}{\beta} \left( \frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (AQ)^{-\frac{1}{\beta}} \left[ q_{\Omega(j)+1}^{\frac{\beta}{1-\beta}} - q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right] e^{-(r+I)(\tau-t)} d\tau.
\end{aligned}$$

Mit (9.56) ergibt sich für die Differenz der Patentwerte zweier direkt benachbarten Qualitätsstufen:

$$\Delta P_{A,q}(j, t) = \left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) P_{A,q}(j, t). \quad (9.60)$$

Einsetzen der letzten Gleichung in den rechten Bruch in (9.59) liefert mit (9.13)

$$\frac{\int_0^{A(t)} \Delta P_{A,q}(j, t) I dj}{\int_0^{A(t)} P_{A,q}(j, t) dj} = \frac{\left( \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) I \int_0^{A(t)} P_{A,q}(j, t) dj}{\int_0^{A(t)} P_{A,q}(j, t) dj} = g_Q.$$

Für den ersten Bruch auf der rechten Seite von (9.59) erhält man über (9.41) die Wachstumsrate. Wie oben bereits gezeigt, wächst der Lohnsatz mit der Rate des Pro-Kopf-Outputs:  $\dot{w}/w = \dot{y}/y = \dot{Y}/Y - n$ . Für  $B_q$  gilt

$$\frac{\dot{B}_q}{B_q} = \phi_q \frac{\dot{A}}{A} + \delta_q \frac{\dot{Q}}{Q}.$$

Zusammen mit (9.15) folgt

$$\frac{\dot{P}_{A,q}(t)}{P_{A,q}(t)} = g_Y - g_A - g_Q.$$

Insgesamt ergibt sich für die Entwicklung des durchschnittlichen Patentwertes  $\bar{P}_{A,q}(t)$ :

$$\frac{\dot{\bar{P}}_{A,q}(t)}{\bar{P}_{A,q}(t)} = g_Y - g_A. \quad (9.61)$$

Weil  $A_q$  mit der Rate  $g_A$  wächst, ist bewiesen, dass das Produkt  $A_q(t) \bar{P}_{A,q}(t)$  in (9.57) mit  $g_Y$  wächst.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass der durchschnittliche Wert der Basis-Qualitäten-Hersteller,  $\bar{P}_{A,v}(t)$ , auch mit  $g_Y - g_A$  wächst. Definitionsgemäß ändert sich der Wert eines solchen Patents nur wegen allgemeinem technischem Fortschritt gemäß Gleichung (9.45). Einsetzen von

$$\frac{\dot{B}_v}{B_v} = \phi_v \frac{\dot{A}}{A} + \delta_v \frac{\dot{Q}}{Q}$$



und (9.11) liefert

$$\frac{\dot{\bar{P}}_{A,v}(t)}{\bar{P}_{A,v}(t)} = g_Y - g_A. \quad (9.62)$$

Gemäß (9.58) wächst  $A_v$  mit Rate  $g_A$ . Das Produkt  $A_v(t)\bar{P}_{A,v}(t)$  in (9.57) wächst darum mit  $g_Y$ .

Damit ist bewiesen, dass jeder einzelne Summand in der Gleichung für den Wertpapierbestand, (9.57), mit  $g_Y$  wächst. Damit folgt

$$\frac{\dot{B}}{B} = g_Y.$$

## 9.8 Appendix: Beweis, dass $r > D_{1/2}$ gilt

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass  $1 - D_{1/2}/r > 0$  bzw.  $r > D_{1/2}$  gilt. Zunächst zum Beweis für  $D_1$ .

Einsetzen der Ramsey-Regel (mit  $\dot{c}/c = \dot{y}/y$ ) und der Definition von  $D_1$ , Gleichung (9.53), in  $r > D_1$  ergibt

$$\sigma \frac{\dot{y}}{y} + \rho > \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I. \quad (9.63)$$

Aus Gleichung (9.21) folgt  $\dot{w}/w = \dot{y}/y$ . Logarithmisches Differenzieren von Definition (9.39) liefert

$$\frac{\dot{B}_q}{B_q} = \phi_q g_A + \delta_q g_Q.$$

Unter Verwendung dieser beiden Gleichungen und Gleichungen (9.13) und (9.15) ergibt sich für (9.63)

$$\rho - n + g_A + g_Q + \frac{g_Q}{\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1} > (1 - \sigma) \frac{\dot{y}}{y}.$$

Die Gültigkeit dieser Restriktion wird durch die Beschränkung aus der Transversalitätsbedingung (9.51) impliziert, weil  $g_A$  und  $g_Q$  wegen der Einschränkung aus (9.19) positiv sind und  $\lambda^{\beta/(1-\beta)} > 1$  ist:

$$\rho - n + g_A + g_Q + \frac{g_Q}{\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1} > \rho - n > (1 - \sigma) \frac{\dot{y}}{y}.$$

Damit ist bewiesen, dass unter den gemachten Restriktionen (9.19) und (9.51) die Aussage  $r > D_1$  wahr ist.

Der Beweis für  $r > D_2$  verläuft analog. Der entsprechende Ausdruck für (9.63) lautet

$$\sigma \frac{\dot{y}}{y} + \rho > \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v} - I.$$

Aus Definition (9.37) ergibt sich

$$\frac{\dot{B}_v}{B_v} = \phi_v g_A + \delta_v g_Q.$$

Zusammen mit Gleichungen (9.11) und (9.13) und mit  $\dot{w}/w = \dot{y}/y$  resultiert

$$\rho - n + g_A + \frac{g_Q}{\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1} > (1 - \sigma) \frac{\dot{y}}{y}.$$

Diese Bedingung wird ebenfalls durch die Parameterbeschränkung aus der Transversalitätsbedingung, Ungleichung (9.51), impliziert. Damit gilt  $r > D_2$  ebenso.

## Teil V

# Zusammenfassung und Schlussbemerkung



# Kapitel 10

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Wachstumsmodelle vorgestellt und in den Kapiteln 7 bis 9 entwickelt, denen mehrere Prämissen über die Ursachen wirtschaftlicher Entwicklung von Ökonomien zugrunde liegen. Die wichtigste ist, dass Innovationen die treibende Kraft für Wirtschaftswachstum sind und dass diese Innovationen von profitorientierten Unternehmen kommen. Dabei wurde auf eine Art von Innovation besonderes Augenmerk gelegt: Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte. Dieser Modellierungsansatz hat einen wichtigen Vorteil gegenüber Modellen, in denen nur neue Produkte erfunden werden: Es kommt zu „kreativer Zerstörung“. Wirtschaftliche Entwicklung ist damit kein glatter Prozess, wie es in den Varietäten-Modellen der Fall ist. Es gibt „Verlierer“ im Wachstumsprozess, wenn qualitativ bessere Produkte erfunden und schlechtere überflüssig werden.

Aus (wirtschafts-) theoretischer Sicht haben die endogenen, innovationsbasierten Wachstumsmodelle eine gravierende Lücke der bis dahin gängigen Modelle auf überzeugende Weise geschlossen. Aus praktischer Sicht ergab sich eine veränderte Einstellung zu marktbeherrschenden Stellungen von innovativen Unternehmen. Es wird seitdem unter Umständen eher akzeptiert, dass statische Wohlfahrtsverluste hingenommen werden müssen, wenn Innovation und Wachstum stattfinden sollen.

Andere wirtschaftspolitische Implikationen der endogenen Wachstumsmodelle haben sich hingegen als falsch herausgestellt. Nach der Veröffentlichung des Romer-Modells identifizierten Wachstumstheoretiker eine ganze Reihe von Politikmaßnahmen, die eine Erhöhung der Wachstumsrate ermöglichen sollten (siehe Arnold (1997, Kapitel 8.5)). Eine Steigerung der Wachstumsrate ist aber in der

Realität, anders als diese Modelle es vorgeben, kein einfaches Unterfangen (siehe Jones (1995a, 1995b)). Und in den Kapiteln 7 und 8 wurde ein Modell entwickelt, in dem das Resultat einer vermeintlich wachstumssteigernden Politik genau ins Gegenteil verkehrt wird: Forschungssubventionen hätten hier einen negativen Effekt auf die langfristige Wachstumsrate.

Für wirtschaftspolitische Analysen besser geeignet sind semi-endogene Wachstumsmodelle. Allerdings lässt sich das in Kapitel 7 entwickelte Modell leicht modifizieren, so dass es zu dieser Klasse der Wachstumsmodelle gehört (siehe Abschnitt 7.5). In dem Modell, das in Kapitel 9 entwickelt wurde, ist Wachstum auch semi-endogen. In diesem kommt es zu langfristigem Wachstum, weil ständig neue und bessere Produkte erfunden und verfügbar werden. Es vereint die Vorzüge von Varietäten- und Qualitäten-Modellen, behält aber trotzdem (v.a. in „reduzierter Form“) eine relativ einfache Struktur und ist anderen (neoklassischen) Modellen sehr ähnlich. Ob dieser Weg tatsächlich besser geeignet ist, Wirtschaftswachstum zu modellieren, kann aber nur eine empirische Untersuchung zeigen.

# Literaturverzeichnis

- Abramovitz, M. (1993), ‘The search for the sources of growth: Areas of ignorance, old and new’, *The Journal of Economic History* **53**, S.217–243.
- Acemoglu, D. (2007), *Introduction to Modern Economic Growth*. Download unter: <http://econ-www.mit.edu/faculty/acemoglu/books>.
- Aghion, P. & Howitt, P. (1992), ‘A model of growth through creative destruction’, *Econometrica* **60**, S.323–351.
- Aghion, P. & Howitt, P. (2006), ‘Joseph Schumpeter lecture. Appropriate growth policy: A unifying framework’, *Journal of the European Economic Association* **4**, S.269–314.
- Aghion, P. & Howitt, P. W. (1998), *Endogenous Growth Theory*, MIT Press.
- Arnold, L. G. (1997), *Wachstumstheorie*, Vahlen.
- Arnold, L. G. (1998), ‘Growth, welfare, and trade in an integrated model of human-capital accumulation and research’, *Journal of Macroeconomics* **20**, S.81–105.
- Arnold, L. G. (2000a), ‘Stability of the market equilibrium in Romer’s model of endogenous technological change: A complete characterization’, *Journal of Macroeconomics* **22**, S.69–84.
- Arnold, L. G. (2000b), ‘Endogenous technological change: A note on stability’, *Economic Theory* **16**, S.219–226.
- Arnold, L. G. (2002), ‘On the effectiveness of growth-enhancing policies in a model of growth without scale effects’, *German Economic Review* **3**, S.339–346.

- Arnold, L. G. (2005a), 'Multi-country endogenous growth models', *University of Regensburg Discussion Papers in Economics*, No. 404.
- Arnold, L. G. (2005b), 'The Jones R&D growth model: Comment on stability', *University of Regensburg Discussion Papers in Economics*, No. 405.
- Arnold, L. G. (2006), 'The dynamics of the Jones R&D growth model', *Review of Economic Dynamics* **9**, S.143–152.
- Arnold, L. G. (2007), 'A generalized multi-country endogenous growth model', *International Economics and Economic Policy* **4**, S.143–152.
- Arnold, L. G. & Kornprobst, W. (2006), 'The dynamics of the Romer R&D growth model with quality upgrading', *University of Regensburg Discussion Papers in Economics*, No. 413.
- Arnold, L. G. & Kornprobst, W. (2007), 'A note on the comparative statics and dynamics of the Romer R&D growth model with quality upgrading', erscheint in *Macroeconomic Dynamics*.
- Arrow, K. J. (1962a), 'The economic implications of learning by doing', *Review of Economic Studies* **29**, S.155–173.
- Arrow, K. J. (1962b), 'Economic welfare and the allocation of resources for inventions'. in: Nelson R. (Hrsg.), *The Rate and Direction of Inventive Activity*, Princeton University Press.
- Asada, T., Semmler, W. & Novak, A. J. (1998), 'Endogenous growth and the balanced growth equilibrium', *Ricerche Economiche* **52**, S.189–212.
- Barro, R. J. (1974), 'Are government bonds net wealth?', *Journal of Political Economy* **81**, S.1095–1117.
- Barro, R. J. & Sala-i-Martin, X. (2004), *Economic Growth*, 2. Auflage, MIT Press.
- Benassy, J.-P. (1998), 'Is there always too little research in endogenous growth with expanding product variety?', *European Economic Review* **42**, S.61–69.
- Benhabib, J., Perli, R. & Xie, D. (1994), 'Monopolistic competition, indeterminacy and growth', *Ricerche Economiche* **48**, S.279–289.



- Bils, M. & Klenow, P. J. (2001), 'Quantifying quality growth', *American Economic Review* **91**, S.1006–1030.
- Blanchard, O. J. & Fischer, S. (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.
- Boskin, M., Dulberger, E. R., Gordon, R. J., Griliches, Z. & Jorgenson, D. (1996), 'Toward a more accurate measure of the cost of living'. Final Report to the Senate Finance Committee, December 4.
- Bulow, J. I. (1982), 'Durable-goods monopolists', *Journal of Political Economy* **90**, S.314–332.
- Caselli, F. & Ventura, J. (2000), 'A representative consumer theory of distribution', *American Economic Review* **90**, S.909–926.
- Cass, D. (1965), 'Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation', *Review of Economic Studies* **32**, S.233–240.
- Chiang, A. (1984), *Fundamental Methods in Mathematical Economics*, 2. Auflage, McGraw-Hill.
- Cozzi, G. (2004), 'Arrow's effect under competitive R&D'. Mimeo, University of Rome, La Sapienza.
- Cozzi, G. (2007), 'The arrow effect under perfectly competitive R&D', *The Berkeley Economics Journal of Macroeconomics* **7**.
- Dasgupta, P. & Stiglitz, J. (1980), 'Uncertainty, industrial structure, and the speed of R&D', *Bell Journal of Economics* **11**, 1–28.
- DeLong, J. B. (2000), 'Cornucopia: The pace of economic growth in the twentieth century', *NBER Working Paper*, No. 7602.
- Devereux, M. B. & Lapham, B. J. (1994), 'The stability of economic integration and endogenous growth.', *Quarterly Journal of Economics* **109**, S.299–308.
- Dinopoulos, E. & Sener, F. (2006), New directions in Schumpeterian growth theory, in H. Hanusch & A. Pyka (Hrsg.), 'Edgar Companion to Neo-Schumpeterian Economics', Edward Elgar.

- Dixit, A. K. & Stiglitz, J. E. (1977), 'Monopolistic competition and optimum product diversity', *American Economic Review* **67**, 297–308.
- Easterly, W. (2001), *The Elusive Quest for Growth. Economists' Adventures and Misadventures in the Tropics*, MIT Press.
- Eicher, T. S. (1996), 'Interaction between endogenous human capital and technological change', *Review of Economic Studies* **63**, S.127–144.
- Ethier, W. J. (1982), 'National and international returns to scale in the modern theory of international trade', *American Economic Review* **72**, 389–405.
- Etro, F. (2004), 'Innovation by leaders', *The Economic Journal* **114**, S.281–303.
- Gandolfo, G. (1996), *Economic Dynamics*, Springer-Verlag.
- Garcia-Castrillo, P. & Sanso, M. (2002), 'Transitional dynamics and thresholds in Romer's endogenous technological change model', *Macroeconomic Dynamics* **6**, S.442–456.
- Grossman, G. M. & Helpman, E. (1991a), *Innovation and Growth in the Global Economy*, MIT Press.
- Grossman, G. M. & Helpman, E. (1991b), 'Quality ladders in the theory of growth', *Review of Economic Studies* **58**, S.43–61.
- Grossman, G. M. & Helpman, E. (1994), 'Endogenous innovation in the theory of growth', *Journal of Economic Perspectives* **8**, S.23–44.
- Hakenes, H. & Irmen, A. (2006), 'Something out of nothing? Neoclassical growth and the 'trivial' steady state', *CESIFO Working Paper No. 1671*.
- Howitt, P. (1999), 'Steady endogenous growth with population and R&D inputs growing', *Journal of Political Economy* **107**, S.715–730.
- Jones, B. F. (2005), 'The burden of knowledge and the 'death of the renaissance man': Is innovation getting harder?', *NBER Working Paper*. Download unter <http://www.nber.org/papers/w11360>.
- Jones, C. I. (1995a), 'Time series tests of endogenous growth models', *Quarterly Journal of Economics* **110**, S.495–525.

- Jones, C. I. (1995b), 'R&D-based models of economic growth', *Journal of Political Economy* **103**, S.759–784.
- Jones, C. I. (1999), 'Growth: With or without scale effects?', *American Economic Review Papers and Proceedings* **89**, S.139–144.
- Jones, C. I. (2002a), *Introduction to Economic Growth*, 2. Auflage, W.W.Norton.
- Jones, C. I. (2002b), 'Sources of U.S. economic growth in a world of ideas', *American Economic Review* **92**, S.220–239.
- Jones, C. I. (2004), 'Growth and ideas', *NBER Working Paper*. Download unter <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/10767.html>.
- Katz, A. J. & Herman, S. W. (1997), 'Improved estimates of fixed reproducible tangible wealth', *Survey of Current Business* **77**, S.69–92.
- Koopmans, T. C. (1965), On the concept of optimal economic growth, in 'The Econometric Approach to Development Planning', North-Holland.
- Kornprobst, W. (2006), 'Das Romer-Modell mit qualitätsverbesserndem technischem Fortschritt', *University of Regensburg Discussion Papers in Economics*, No. 412.
- Kortum, S. (1993), 'Equilibrium R&D and the patent-R&D ratio: U.S. evidence', *American Economic Review, Papers and Proceedings* **83**, S.450–457.
- Kortum, S. (1997), 'Research, patenting and technological change', *Econometrica* **65**, S.1389–1419.
- Li, C.-W. (1998), 'Stochastic variety innovation in a growth model', *University of Glasgow Discussion Paper in Economics*, No. 9818. Download unter <http://ideas.repec.org/p/gla/glaewp/9818.html>.
- Li, C.-W. (2000), 'Endogenous vs. semi-endogenous growth in a two-R&D-sector model', *The Economic Journal* **110**, S.110–122.
- Lingens, J. (2005), 'Policy implications of endogenous growth models: A note', *Economics Bulletin* **15**, S.1–7.

- Lucas, R. E. J. (1988), 'On the mechanics of economic development', *Journal of Monetary Economics* **22**, S.3–42.
- Merton, R. C. (1973), 'Theory of rational option pricing', *Bell Journal of Economics* **4**, S.141–183.
- Modigliani, F. & Miller, M. (1958), 'The cost of capital, corporation finance and the theory of investment', *American Economic Review* **48**, S.261–297.
- Mokyr, J. (2005), Long-term economic growth and the history of technology, in P. Aghion & S. N. Durlauf (Hrsg.), 'Handbook of Economic Growth', North Holland, S.1113–1180.
- Nordhaus, W. D. (1996), Do real output and real wage measures capture reality? The history of lightning suggests not, in T. F. Bresnahan & R. J. Gordon (Hrsg.), 'The Economics of New Goods', University of Chicago Press for National Bureau of Economic Research.
- Nordhaus, W. D. (1997), 'Traditional productivity estimates are asleep at the (technological) switch', *Economic Journal* **107**, S.1548–1559.
- Nordhaus, W. D. (1998), 'Quality change in price indexes', *Journal of Economic Perspectives* **12**, S.59–68.
- Nordhaus, W. D. (2006), 'The Stern review on the economics of climate change'. Download unter: <http://nordhaus.econ.yale.edu/SternReviewD2.pdf>.
- Nordhaus, W. D. (2007), 'A review of the Stern review on the economics of climate change', *Journal of Economic Literature* **45**, S.668–702.
- Obstfeld, M. (1992), 'Dynamic optimization in continuous-time economic models. (A guide for the perplexed)'. Mimeo, University of California at Berkeley.
- Pagano, M. (1993), 'Financial markets and growth: An overview', *European Economic Review* **37**, S.613–622.
- Ramsey, F. P. (1928), 'A mathematical theory of saving', *The Economic Journal* **38**, S.543–559.
- Rivera-Batiz, L. A. & Romer, P. M. (1991), 'Economic integration and endogenous growth', *Quarterly Journal of Economics* **106**, S.531–555.

- Romer, D. (2001), *Advanced Macroeconomics*, 2. Auflage, McGraw-Hill.
- Romer, P. M. (1986), 'Increasing returns and long-run growth', *Journal of Political Economy* **94**, S.1002–1037.
- Romer, P. M. (1987), 'Growth based on increasing returns due to specialization', *American Economic Review* **77**, S.56–62.
- Romer, P. M. (1990a), 'Endogenous technological change', *Journal of Political Economy* **98**, S.71–102.
- Romer, P. M. (1990b), 'Are nonconvexities important for understanding growth?', *American Economic Review Papers and Proceedings* **80**, S.97–103.
- Romer, P. M. (1992), Two strategies for economic development: Using ideas and producing ideas, in 'Proceedings of the World Bank Annual Conference on Development Economics', World Bank.
- Sala-i-Martin, X. (2006), 'The world distribution of income: Falling poverty and ... convergence, period', *The Quarterly Journal of Economics* **121**, S.351–397.
- Schumpeter, J. A. (1942/46), *Kapitalismus, Sozialismus und Demokratie*, 6. Auflage, Verlag A. Francke AG.
- Schumpeter, J. A. (1964), *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung*, 6. Auflage, Duncker & Humblot. Unveränderter Nachdruck der 1934 erschienenen 4. Auflage.
- Segerstrom, P. S. (1998), 'Endogenous growth without scale effects', *American Economic Review* **88**, S.1290–1310.
- Segerstrom, P. S., Anant, T. & Dinopoulos, E. (1990), 'A Schumpeterian model of the product life cycle', *American Economic Review* **80**, S.1077–1091.
- Shell, K. (1966), 'Toward a theory of inventive activity and capital accumulation', *American Economic Review* **56**, S.62–68.
- Smith, A. (1776), *Der Wohlstand der Nationen. Eine Untersuchung seiner Natur und seiner Ursachen*, Dtv. Deutsche Übersetzung aus 1999.

- Solow, R. M. (1956), 'A contribution to the theory of economic growth', *Quarterly Journal of Economics* **70**, S.65–94.
- Solow, R. M. (1957), 'Technical change and the aggregate production function', *Review of Economics and Statistics* **39**, S.312–320.
- Solow, R. M. (2005), Reflections on growth theory, in P. Aghion & S. N. Durlauf (Hrsg.), 'Handbook of Economic Growth', North Holland, S.3–10.
- Spence, M. (1976), 'Product selection, fixed costs, and monopolistic competition', *Review of Economic Studies* **43**, 217–35.
- Stadler, M. (2004), Bildung, Innovationsdynamik und Produktivitätswachstum, in W. Franz (Hrsg.), 'Bildung', Mohr Siebeck, S.141–155.
- Stern, N. (2006), 'Stern review on the economics of climate change'. Download unter: <http://www.hm-treasury.gov.uk>.
- Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A. & Størm, A. (2005), *Further Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall.
- The Economist (2006), 'Bitter pill'. 7.12.2006.
- The Economist (2007), 'Peaks, valleys and vistas'. 18.01.2007.
- Tirole, J. (1988), *The Theory of Industrial Organisation*, MIT Press.
- UNCDB United Nations Common Database (2007), 'Online data'. Download unter: <http://unstats.un.org/unsd/cdb/default.asp>.
- Uzawa, H. (1965), 'Optimal technical change in an aggregative model of economic growth', *International Economic Review* **6**, S.12–31.
- Varian, H. (1992), *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton & Company.
- Warsh, D. (2006), *Knowledge and the Wealth of Nations*, W. W. Norton & Company.
- Weltbank, World Development Indicators (2007), 'Online data'. Download unter: <http://www.worldbank.org/data>.

- Young, A. (1995), 'The tyranny of numbers: Confronting the statistical realities of the East Asian growth experience', *Quarterly Journal of Economics* **110**, S.641–680.
- Young, A. (1998), 'Growth without scale effects', *Journal of Political Economy* **106**, S.41–63.